

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 1, 15.2. 2022

1. Käytä Fourier-muunnoksen määritelmää osoittaaksesi, että

$$\mathcal{F}[\alpha f] = \alpha \mathcal{F}[f] \text{ ja että } \mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g].$$

2. Olkoon $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$ kuten edellisessä tehtävässä. Käytä Fourier-muunnoksen määritelmää osoittaaksesi, että

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](y) = F(y)e^{-2\pi i x_0 y}.$$

Ohje: Tee sopiva sijoitus Fourier-muunnoksen määrittelevään integraaliin.

3. Olkoon $F(y)$ kuten edellisessä tehtävässä ja $\alpha < 0$. Selvitä mitä on $\mathcal{F}[f(\alpha x)](y)$.
Ohje: Sijoita Fourier-muunnoksen määrittelevään integraaliin $x = \frac{s}{\alpha}$.

4. Piirrä kuvaaja kolmiopulssille

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{jos } x \in [-1, 0] \\ -x + 1, & \text{jos } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{jos } x \geq 1 \end{cases},$$

selvitä millaisen funktion f integraalifunktio Λ on, ja laske integrointiperiaatetta (vuoden 2019 Moniste C, esimerkki 52) käyttämällä $\mathcal{F}[\Lambda(x)](y)$. Ohje 1: Mieti ensin millainen olisi derivaattafunktio Λ :lle. Ohje 2: Funktion f esityksessä esiintyy suorakulmaisia pulsseja.

5. Selvitä duaalitettiperiaatetta käyttämällä $\mathcal{F}[\delta(x)](y)$ ja tämän avulla $\mathcal{F}[\delta'(x)](y)$. Käytä jälkimmäistä tulosta selvittääksesi $\mathcal{F}[x](y)$.

6. Laske $\mathcal{F}[e^{-|x|}](y)$ suoraan Fourier-muunnoksen määritelmään perustuen. Vastaus: $\frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2}$, mutta esitä yksityiskohdat ja perustelut.

7. Määritä

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + x^2}\right](y).$$

Ohje: Etsi edelliseen tehtävän, lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen avulla sellainen funktio $f(x)$, jolle $\mathcal{F}[f(x)](y) = \frac{1}{1+y^2}$. Käytä lopuksi duaaliperiaatetta.

8. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x)$ ei ole olemassa (äärellisenä) millekään luvulle $x \in \mathbb{R}$.

9. Määritellään Hermiten sisätulo tavalliseen tapaan:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Laske sisätulo $(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x})$ ja esitä se δ -funktion avulla. Ohje: Voit hyödyntää luentoruudun 2/18 esitystapoja.