

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 2, 22.3. 2022

1. Määritä funktion $\delta(x - f)$ amplitudi- ja vaihespektrit

2. Laske konvoluutio

$$\delta\left(x - \frac{n}{2B}\right) * \text{sinc } 2Bx.$$

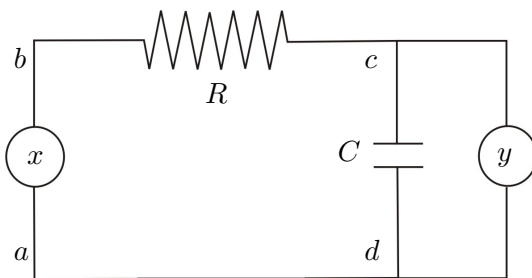
3. Laske $\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](y)$, kun $\alpha > 0$. Ohje: Luentoruutu 3/10 ja skaalausperiaate.

4. Määritä edellisen tehtävän ja luentoruudun 3/10 perusteella sellainen vakio C , että $Ce^{-\alpha x^2}$ on todennäköisyysjakauma. Laske tämän jakauman odotusarvo ja varianssi. Ohje: Myös luentoruutu 3/10.

5. Kun $\alpha, \beta > 0$, muotoa $f(x) = \beta e^{-\alpha x^2}$ olevia funktioita ja niiden kuvaajia kutsutaan Gaussin kellokäyriksi. Totea aluksi että jos $f(x)$ on Gaussin kellokäyrä, niin myös $|f(x)|^2$ on. Olkoon $\alpha > 0$ kiinnitetty. Määritä edellisen tehtävän perusteella sellainen $\beta > 0$, että $|f(x)|^2$ on todennäköisyysjakauma. Laske tämän jakauman varianssi, $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$, sekä jakauman $|F(y)|^2$ varianssi.

6. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen x (input) ja mitatavan jännitteen y (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteen: jännite x olkoon syöte ja y tuloste. Selvitä millä tavalla $y(t)$:n spektri $Y(f)$ riippuu $x(t)$:n spektristä $X(f)$. Selvitä lopuksi miten $y(t)$:n amplitudispektri voidaan esittää $x(t)$:n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite y on sama kuin pisteiden c ja d välinen jännite. Merkitse piirissä $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ kulkevaa virtaa I :llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä $U = RI$, $U = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$. Mittarin y kautta kulkeva virta oletetaan nollassa. Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fourier-muunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



7. Signaalista $f(x)$ on saatu 1000 näytettä aikavälillä $[0, 1]$ tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono $(f_0, f_1, \dots, f_{999})$. Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \dots, F_{999})$. Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat F_{11} , F_{499} , F_{782} ja F_{946} ?

8. Etsi 2×2 -matriisi U , joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on U :n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille $(1, 0)^T$ ja $(0, 1)^T$.

9. Olkoon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ja $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \text{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$. Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke F_{l-r} :lle (luentoruudut 4/18), vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.