

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 2, 22.3. 2022

1. Määritä funktion $\delta(x - f)$ amplitudi- ja vaihespektrit

Vastaus:

$$\mathcal{F}[\delta(x - f)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - f) e^{-2\pi i x y} dx = e^{-2\pi i f y}.$$

Tällöin siis amplitudispektri on $|\mathcal{F}(y)| = 1$ ja vaihespektri on $-2\pi f y$.

Tulkinta: Signaalin $\delta(x - f)$ spektrissä esiintyvät kaikki taajuuudet y itseisarvoltaan 1 amplitudilla, mutta vaihekulma on $-2\pi f y$.

2. Laske konvoluutio

$$\delta(x - \frac{n}{2B}) * \text{sinc } 2Bx.$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} \delta(x - \frac{n}{2B}) * \text{sinc } 2Bx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{2B}) \text{sinc } 2B(x - t) dt \\ &= \text{sinc } 2B(x - \frac{n}{2B}) = \text{sinc}(2Bx - n). \end{aligned}$$

3. Laske $\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](y)$, kun $\alpha > 0$. Ohje: Luentoruutu 3/10 ja skaalausperiaate.

Vastaus:

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](y) = \mathcal{F}[e^{-\pi(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}x)^2}](y) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}y)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}y^2}$$

4. Määritä edellisen tehtävän ja luentoruudun 3/10 perusteella sellainen vakio C , että $Ce^{-\alpha x^2}$ on todennäköisyysjakauma. Laske tämän jakauman odotusarvo ja varianssi. Ohje: Myös luentoruutu 3/10.

Vastaus: Koska

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(0) = C\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Valitsemalla $C = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ saadaan todennäköisyysjakauma. Odotusarvoa ja varianssia varten lasketaan 1. ja 2. origomomentit, jotka saadaan spektrin $F(y)$ useampikertaisten derivaattojen nollakohdista. Nämä puolestaan löytyvät Taylorin kehitelmän avulla:

$$F(y) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}y^2} = 1 - \frac{\pi^2}{\alpha}y^2 + \dots$$

Tästä nähdään suoraan $\alpha_1 = \frac{F'(0)}{-2\pi i} = 0$ ja $\alpha_2 = \frac{F''(0)}{(-2\pi i)^2} = \frac{-2! \cdot \frac{\pi^2}{\alpha}}{-4\pi^2} = \frac{1}{2\alpha}$.

Odotusarvo on näin ollen 0 ja varianssi $\alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{2\alpha}$.

Huomautus: Arvolla $\alpha = \frac{1}{2}$ saadaan ns. standardoitu normaali-jakauma $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi 1

5. Kun $\alpha, \beta > 0$, muotoa $f(x) = \beta e^{-\alpha x^2}$ olevia funktioita ja niiden kuvaajia kutsutaan Gaussin kellokäyriksi. Totea aluksi että jos $f(x)$ on Gaussin kellokäyrä, niin myös $|f(x)|^2$ on. Olkoon $\alpha > 0$ kiinnitetty. Määritä edellisen tehtävän perusteella sellainen $\beta > 0$, että $|f(x)|^2$ on todennäköisyysjakauma. Laske tämän jakauman varianssi, $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$, sekä jakauman $|F(y)|^2$ varianssi.

Vastaus: $|f(x)|^2 = \beta^2 e^{-2\alpha x^2}$, missä $\beta^2, 2\alpha > 0$, joten myös $|f(x)|^2$ on Gaussin kellokäyrä. Jotta

$$\left| \beta e^{-\alpha x^2} \right|^2 = \beta^2 e^{-2\alpha x^2}$$

olisi todennäköisyysjakauma, pitää edellisen tehtävän mukaan olla $\beta^2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$, siis $\beta = \sqrt[4]{\frac{2\alpha}{\pi}}$. Edellisen tehtävän perusteella jakauman $|f(x)|^2$ odotusarvo on 0 ja varianssi $\frac{1}{2 \cdot 2\alpha} = \frac{1}{4\alpha}$.

Tehtävän 3 mukaan $F(y) = \beta \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} y^2}$, joten jakauma $|F(y)|^2$ on muotoa

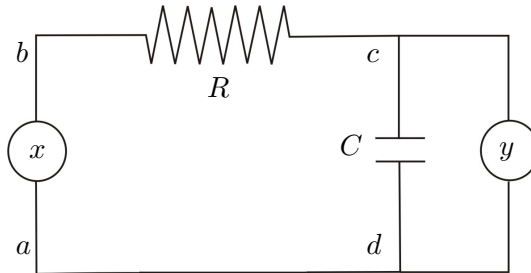
$$|F(y)|^2 = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\frac{2\pi^2}{\alpha} y^2}.$$

Edellisten tehtävien perusteella tämän varianssi on $\frac{\alpha}{4\pi^2}$.

Huomautus: Ylläolevien tehtävien perusteella jakaumien $|f(y)|^2$ ja $|F(y)|^2$ varianssien tulo on $\frac{1}{16\pi^2}$. Ns. Heisenbergin epäyhtälön mukaan varianssien tulo muotoa $|f(x)|^2$ ja $|\mathcal{F}[f(x)](y)|^2$ oleville jakaumille on aina vähintään tämän suuruinen. Heisenbergin epäyhtälöön liittyvää periaatetta pidetään yhtenä 1900-luvun tieteen merkittävimmistä saavutuksista. Kvanttimekaniikkaan sovellettuna se tarkoittaa esimerkiksi sitä, että hiukkasen liikemäärää ja paikkaa ei voi yhtäaikaaisesti määrittää miten tarkasti hyvänsä.

6. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen x (input) ja mitatavan jännitteen y (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteeksi: jännite x olkoon syöte ja y tuloste. Selvitä millä tavalla $y(t)$:n spektri $Y(f)$ riippuu $x(t)$:n spektristä $X(f)$. Selvitä lopuksi miten $y(t)$:n amplitudispektri voidaan esittää $x(t)$:n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite y on sama kuin pisteiden c ja d välinen jännite. Merkitse piirissä $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ kulkevaa virtaa I :llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä $U = RI$, $U = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$. Mittarin y kautta kulkeva virta oletetaan nollassi. Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fouriermuunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



Vastaus: $x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$.

Merkitään $X(f) = \mathcal{F}[x(t)](f)$ ja $Y(f) = \mathcal{F}[y(t)](f)$, jolloin

$$X = RC \cdot 2\pi i f Y + Y = (2\pi i f RC + 1)Y$$

ja siis

$$Y = \frac{1}{2\pi i f RC + 1} X,$$

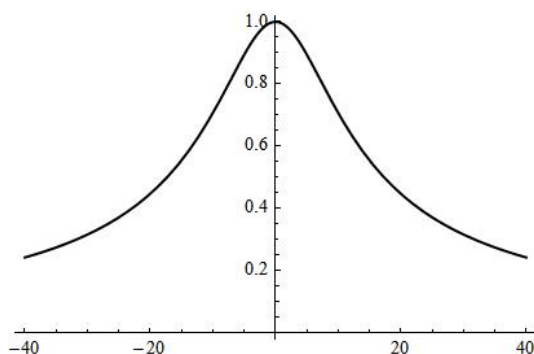
mistä

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC f)^2}} |X|.$$

Jos merkitään $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$, saa viimeisin yhtälö muodon

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}} |X|.$$

Tulkintaa: Funktion $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}}$ graafinen esitys (alla kuva arvolla $f_0 = 10$) tarjoaa selityksen siihen, miksi tehtävän piiriä kutsutaan *alipäästö-suodattimeksi*. Funktion $H(f)$ arvo on lähellä lukua 1 kun taajuus f on lähellä nolla, mutta f :n kasvaessa itseisarvoltaan suuremmaksi arvon $H(f)$ lähenee nollaa.



Mikäli tehtävän piiri ajatellaan laitteeksi, joka muokkaa lähtöjännitteestä x (input) tulostejännitteen (output), voidaan todeta että yhtälön $|Y| = H(f) |X|$ perusteella lähellä nollaa olevat taajuudet signaalissa x eivät vaimene paljoakaan, mutta kaukana nollasta olevat taajuudet vaimenevat paljon: $H(f)$ toimii vaimennuskertoimena. $H(f)$ onkin ideaalisen pulssifunktion reaalinen vastine, joka voidaan toteuttaa passiivisilla (eivät tarvitse ulkoista virtalähdettä) komponenteilla tässä tapauksessa, jossa signaalia edustaa jännitteen vaihtelu.

7. Signaalista $f(x)$ on saatu 1000 näytettä aikavälillä $[0, 1]$ tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono $(f_0, f_1, \dots, f_{999})$. Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \dots, F_{999})$. Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat F_{11} , F_{499} , F_{782} ja F_{946} ?

Vastaus: Taajuudet ovat 11, 499, $1000 - 782 = 218$ ja $1000 - 946 = 54$

8. Etsi 2×2 -matriisi U , joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on U :n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille $(1, 0)^T$ ja $(0, 1)^T$.

Vastaus: Jos $(F_0, F_1) = \text{DFT}(f_0, f_1)$, on

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 + f_1)$$

ja

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 - f_1)$$

mistä voidaan laskea $\text{DFT}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ sekä $\text{DFT}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. Näin ollen

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tästä voidaan määrittää $U^{-1} = U$.

9. Olkoon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ja $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \text{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$. Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke F_{l-r} :lle (luentoruudut 4/18), vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k(l-r)}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} e^{\frac{2\pi i k r}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r e^{\frac{2\pi i k r}{N}}}_{g_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}}. \end{aligned}$$

Viimeisin lauseke on tulojonon $(f_0 g_0, f_1 g_1, \dots, f_{N-1} g_{N-1})$ diskreetin Fourier-muunnoksen l :s alkio. Saatu kaava on siis diskreettien Fourier-muunnosten konvoluutio.