

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 3, 29.3. 2022

1. Laske jonon $(1, 2, 1, 3)$ diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä FFT-algoritmia.

Vastaus: Jaetaan syöte kahteen osaan: $(1, 1)$ ja $(2, 3)$ ja lasketaan näille erikseen diskreetti Fourier-muunnos.

Syötteelle $(1, 1)$ lasketaan DFT jakamalla jono osiin (1) ja (1) , joiden diskreetti Fourier-muunnos on sama kuin jono itse. Nämä voidaan siis yhdistää

$$\text{FFT}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2}} \cdot 1, 1 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2}} \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, 0).$$

Samoin saadaan

$$\text{FFT}(2, 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2}} \cdot 3, 2 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2}} \cdot 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(5, -1).$$

Näistä voidaan yhdistää

$$\begin{aligned} & \text{FFT}(1, 2, 1, 3) \\ &= \frac{1}{2}(2 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{4}} \cdot 5, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{4}} \cdot (-1), 2 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{4}} \cdot 5, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{4}} \cdot (-1)) \\ &= \frac{1}{2}(7, -i, -3, i). \end{aligned}$$

2. Totea oikeaksi kaava $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - a)$.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t} dt \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s - a). \end{aligned}$$

3. Laske Laplace-muunnos $\mathcal{L}[\cos t](s)$. Ohje: Voit soveltaa Eulerin kaavaa.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos t](s) &= \int_0^\infty \cos t e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(i-s)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(-i-s)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{i-s} e^{(i-s)t} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{i+s} e^{(-i-s)t} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{i-s} + \frac{1}{i+s} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{i+s}{-1-s^2} + \frac{i-s}{-1-s^2} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - 4y = 1$ reunaehdolla $y(0) = 2$.

Vastaus: Laskemalla Laplace-muunnokset saadaan

$$sY - 2 - 4Y = \frac{1}{s},$$

josta voidaan ratkaista

$$Y = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}.$$

Taulukon avulla saadaan käännteismuunnoksena

$$y(t) = 2e^{4t} + \frac{1}{4}(e^{4t} - 1) = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4}e^{4t}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ reunaehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -1$.

Vastaus: Laplace-muunnoksilla saadaan

$$s^2Y - s + 1 - 4(sY - 1) + 4Y = \frac{1}{s-2},$$

josta voidaan ratkaista

$$Y = \frac{s}{(s-2)^2} - \frac{5}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3}.$$

Käyttämällä taulukon riviä 22 nähdään että toiselle ja kolmannelle termille saadaan käännteismuunnokset seuraavasti: $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2}](t) = te^{2t}$ ja $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-2)^3}](t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t}$. Ensimmäisen termin käännteinen Laplace-muunnos saadaan soveltamalla riviä 4: koska $\mathcal{L}[te^{2t}] = \frac{1}{(s-2)^2}$ ja $\frac{d}{dt}(te^{2t}) = e^{2t} + te^{2t} \cdot 2 = (1+2t)e^{2t}$, on

$$\mathcal{L}[(1+2t)e^{2t}](s) = s \cdot \frac{1}{(s-2)^2}.$$

Näistä saadaan koostettua

$$y(t) = e^{2t}(1+2t) - 5te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} = e^{2t} - 3te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t}.$$

6. Suorita jakolasku $\frac{x^3 + 4x^2 - 8x - 2}{x^2 - x - 2}$ jakokulmassa ja etsi sen jälkeen osamurtohajotelma jossa nimittäjät ovat mahdollisimman pientä astetta.

Vastaus: Jakokulmassa saadaan osamääräksi $x+5$ ja jakojäännökseksi $-x+8$ jolloin siis

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 8x - 2}{x^2 - x - 2} = x + 5 + \frac{-x + 8}{x^2 - x - 2}.$$

Hajotelma jälkimmäiselle termille löytyy ensin hakemalla nimittäjän nollakohdat, jotka ovat -1 ja 2 , siis $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Koska $\text{syt}(x+1, x-2) = 1$, on olemassa tyyppiä I oleva hajotelma

$$\frac{-x + 8}{x^2 - x - 2} = \frac{-x + 8}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Kerroin A saadaan kertomalla ylläoleva yhtälö lausekkeella $x+1$:

$$\frac{-x + 8}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2},$$

josta sijoituksella $x = -1$ saadaan $A = -3$. Lausekkeella $x-2$ kertominen puolestaan antaa

$$\frac{-x + 8}{x+1} = \frac{A(x-2)}{x+1} + B,$$

ja sijoituksella $x = 2$ saadaan $B = 2$. Yhteenvetona:

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 8x - 2}{x^2 - x - 2} = x + 5 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-2}.$$

7. Etsi osamurtohajotelma (tyyppiä II) rationaalilausekkeelle

$$\frac{2x-3}{(x-3)^2}.$$

Vastaus: Kyseessä on tyypin II hajotelma:

$$\frac{2x-3}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}.$$

Laventamalla oikean puolen lausekkeet samannimisiksi saadaan

$$\frac{2x-3}{(x-3)^2} = \frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2},$$

ja vertaamalla yhtälön eri puolia saadaan yhtälöpari $A = 2$ ja $-3 = -3A + B$.
Tämän ratkaisut ovat $A = 2$, $B = 3$. Yhteenvetona,

$$\frac{2x-3}{(x-3)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}$$

8. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$$

kaikki ratkaisut käyttämällä luentoruuduissa mainittua yritelmää. Ohje: Polynomin $x^3 - x^2 - 8x + 12$ yksi nollakohta on $x = 2$.

Vastaus: Yritelmä $y = e^{\lambda t}$ tuottaa karakteristisen yhtälön

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0. \quad (1)$$

Koska vasemman puolen polynomilla on nollakohta $\lambda = 2$, saadaan jakokulmassa

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda - 6).$$

Polynomille $\lambda^2 + \lambda - 6$ on helppo löytää nollakohdat 2 ja -3 , joten

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3).$$

$\lambda = 2$ on siis kaksinkertainen nollakohta ja $\lambda = 3$ yksinkertainen nollakohta. Näin ollen riippumattomat ratkaisut differentiaaliyhtälölle ovat e^{2t} , te^{2t} , ja e^{-3t} ja yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaationa:

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 e^{-3t},$$

missä c_1 , c_2 , c_3 ovat vakioita.

9. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

kaikki ratkaisut käyttämällä luentoruuduissa mainittua yritelmää. Esitä ratkaisut myös reaalissa muodossa.

Vastaus: Sijoitus $y = e^{\lambda t}$ tuottaa karakteristisen yhtälön

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat $1 \pm 2i$. Täten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$c_1 e^{(1-2i)t} + c_2 e^{(1+2i)t},$$

missä c_1, c_2 ovat vakioita.

Reaalista muotoa varten voidaan kirjoittaa $e^{(1\pm 2i)t} = e^t(\cos 2t \pm i \sin 2t)$ ja lineaarisesti riippumattomiksi ratkaisuiksi voidaan valita $y_1 = e^t \cos 2t$ ja $y_2 = e^t \sin 2t$, ja yleinen ratkaisu on näiden lineaarikombinaatio

$$y = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t.$$