

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 4, 5.4. 2022

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - \frac{1}{x^2}y = xe^{-\frac{1}{x}}$.

Vastaus: Homogeenisen yhtälön $y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ ratkaisut saadaan seuraavasti:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{x^2},$$

josta $\ln |y| = -\frac{1}{x} + C_0$, $|y| = e^{C_0} e^{-\frac{1}{x}}$, ja edelleen $y = \pm e^{C_0} e^{-\frac{1}{x}} = C e^{-\frac{1}{x}}$. Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu saadaan vakion varioinnilla: $y = C(x) e^{-\frac{1}{x}}$, ja sijoittamalla tämä DY:hyn saadaan

$$C'(x) e^{-\frac{1}{x}} + C(x) e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} C(x) e^{-\frac{1}{x}} = x e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow C'(x) = x.$$

Tästä saadaan $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ ja $y = C e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{x}}$.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y^2 y' = e^x$.

Vastaus: DY on separoituva:

$$y^2 \frac{dy}{dx} = e^x \Leftrightarrow y^2 dy = e^x dx \Leftrightarrow \int y^2 dy = e^x dx + C \Leftrightarrow \frac{1}{3} y^3 = e^x + C.$$

Tästä saadaan myös eksplisiittimuoto $y = (3e^x + 3C)^{\frac{1}{3}}$.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

ottamalla käyttöön uusi funktio $z = \frac{y}{x}$ (jolloin siis $y = zx$). Laske y' käyttämällä tulon derivointisääntöä, ja sijoita $y = zx$ differentiaaliyhtälöön.

Vastaus: differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Jos sijoitetaan $z = \frac{y}{x}$, on $y = zx$ ja $y' = z'x + z$ ja yhtälö saa muodon $z'x + z = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^2}{1-z}$, joka on separoituva:

$$\frac{dz}{dx} x = \frac{1+z^2}{1-z} \Rightarrow \int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx + C$$

ja edelleen

$$\arctan z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln x + C.$$

$$\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + C \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 2y = 1 + e^{3x}$.

Vastaus: Homogeenisen yhtälön $y' + 2y = 0$ ratkaisut saadaan yritteellä $y = e^{\lambda x}$, josta saadaan algebrallinen yhtälö $\lambda + 2 = 0$. Täten homogeenisen yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa $y = Ce^{-2x}$.

Yksittäisratkaisu voidaan yritteillä kuten tehtävässä 1. Toinen vaihtoehto on käyttää vakion variointia: Olkoon $y = C(x)e^{-2x}$, joka alkuperäiseen yhtälöön sijoittamalla tuottaa

$$C'(x)e^{-2x} = 1 + e^{3x} \Rightarrow C'(x) = e^{2x} + e^{5x},$$

josta

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{5}e^{5x} + C,$$

ja näin ollen

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}.$$

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - \frac{1}{x}y = 1$.

Vastaus: Vasen puoli ei ole määritelty, jos $x = 0$, ja oletetaan aluksi että $x > 0$. Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y = 0 &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln |y| = \ln x + C_0 \Leftrightarrow |y| = e^{C_0}x \Leftrightarrow y = Cx, \end{aligned}$$

Missä $C = \pm e^{C_0}$ (kaksi eri ratkaisua). Lisäksi huomataan, että vakioratkaisu $y = 0$ voidaan myös esittää tässä muodossa kun valitaan $C = 0$.

Tämän jälkeen alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan vakion varioinnilla: $y = C(x)x$, josta $y' = C'(x)x + C(x)$, joka sijoittamalla saadaan

$$C'(x)x - C(x) + \frac{1}{x}C(x)x = 1 \Leftrightarrow C'(x)x = 1 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Tästä $C(x) = \ln x + C$ ja edelleen $y = x \ln x + Cx$.

Tapaus $x < 0$ käsitellään samoin, Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisu on sama kuin edellä, $C(x) = \ln |x| + C$ ja tästä $y = x \ln |x| + Cx$. Ratkaisut voidaan yhdistää viimeisimpään muotoon.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = y^2x^3$.

Vastaus: DY on separoituva ja ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = y^2x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = x^3 dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

josta $y = -\frac{1}{\frac{1}{4}x^4 + C}$. Jos kuitenkin $y = 0$ on vakio, ei jakaminen onnistu mutta voidaan todeta että $y = 0$ on myös ratkaisu

7. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xe^{-y}$.

Vastaus: DY on separoituva ja ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Leftrightarrow e^y dy = x dx \Leftrightarrow \int e^y dy = \int x dx \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

josta $y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + C)$.

8. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = (x+1)(y+1)$

Vastaus:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} dy = (x+1) dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1} dy &= \int (x+1) dx + C \Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + x + C.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$|y+1| = e^{\frac{1}{2}x^2+x+C},$$

joten mikäli $y > -1$, on

$$y = -1 + e^{\frac{1}{2}x^2+x+C}.$$

Jos taas $y < -1$, on

$$y = -1 - e^{\frac{1}{2}x^2+x+C}$$

Jos $y = -1$ on vakio, ei jakaminen alussa onnistu mutta voidaan todeta että $y = -1$ on kuitenkin ratkaisu.

9. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$3x^2 + 2xy + 3 + (x^2 - 4y)y' = 0.$$

Ohje: Yhtälö on eksakti.

Vastaus: Koska $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy + 3) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4y)$, on yhtälö eksakti ja ratkaisua varten etsitään funktio F , jolle pätee

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 + 2xy + 3 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x^2 - 4y. \end{cases}$$

Ylemmän yhtälön perusteella $F = x^3 + x^2y + 3x + C(y)$, josta $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + C'(y)$ ja alemman yhtälön perusteella $C'(y) = -4y$ ja edelleen $C(y) = -2y^2 + C$. Differentiaaliyhtälön ratkaisu on täten

$$x^3 + x^2y + 3x - 2y^2 = D.$$