

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 5, 12.4. 2022 (tarkoitettu itsenäisesti pohdittaviksi, ei demotilaisuutta)

1. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' + 4x + 4y &= 0 \\ y' + 2x + 6y &= 0 \end{cases}$$

Vastaus: DY-pari on homogeeninen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Koska matriisin A ominaisarvot ovat -8 ja -2 sekä näihin liittyvät ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on DY-parin yleinen ratkaisu muotoa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y + t \\ y' &= 2x - 2y + 3e^t \end{cases}$$

Vastaus: Tapa 1: Etsitään ensin homogeenisen DY-parin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat 2 ja -1 ja näihin liittyvät ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Näin ollen homogeenisen DY-ryhmän yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}}_{X(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}}$$

Etsitään epähomogeenisen yhtälön ratkaisu vakion varioinnilla: Merkitään $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}(t)$, josta $\mathbf{x}' = X'(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\mathbf{c}'(t)$ ja näin ollen

$$X'(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\mathbf{c}'(t) = AX(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{f} \Leftrightarrow X(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f},$$

missä on merkitty $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}$. Tällöin

$$\mathbf{c}'(t) = X^{-1}(t)\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ -\frac{1}{3}e^t & \frac{2}{3}e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}te^{-2t} - e^{-t} \\ -\frac{1}{3}te^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Tästä saadaan integroimalla

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{3}te^{-2t} \\ \frac{1}{3}e^t + e^{2t} - \frac{1}{3}te^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

josta saadaan $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t - t \\ \frac{1}{2} + 3e^t - t \end{pmatrix} + X(t) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Yllä olevassa yhtälössä jälkimmäinen yhteenlaskettava on homogeenisen DY-parin ratkaisu ja ensimmäinen on yksittäisratkaisu DY-parille.

Tapa 2: Etsitään homogeenisen DY-parin ratkaisut kuten tavassa 1 ja yksittäisratkaisu Laplace-muunnoksilla. Voidaan pyrkiä ratkaisuun, jolle $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, jolloin DY-pari

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

muuntuu muotoon

$$s\mathbf{X} = A\mathbf{X} + \mathbf{F} \Leftrightarrow (sI - A)\mathbf{X} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{X} = (sI - A)^{-1}\mathbf{F}.$$

Laplace-muunnosten perusteella matriisiin $(sI - A)^{-1}$ käänteismuunnos on e^{tA} , jolloin konvoluutiosäännön perusteella saadaan yksittäisratkaisuksi

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} * \mathbf{f}(t) = \int_0^t e^{(t-u)A} \mathbf{f}(u) du = e^{tA} \int_0^t e^{-uA} \mathbf{f}(u) du.$$

Matriisi e^{tA} voidaan määrittää diagonaaliesityksen avulla: Kun valitaan $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

josta saadaan

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^{-t} + 4e^{2t} & 2e^{-t} + 2e^{2t} \\ -2e^{-t} - 2e^{2t} & 4e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

ja tästä suoraan laskemalla

$$e^{tA} \int_0^t e^{-uA} \mathbf{f}(u) du = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + 3e^t - t \\ -\frac{5}{6}e^{2t} - \frac{8}{3}e^{-t} + \frac{1}{2} - t + 3e^t \end{pmatrix}.$$

Tämä on yksittäisratkaisu DY-parille, joskin vektorin molemmista koordinaateista voidaan kaksi ensimmäistä summattavaa yhdistää homogeenisen yhtälön ratkaisuun.

Kun verrataan tätä aiempaan tapaan

$$X(t) \int X^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt,$$

voidaan huomata että kyseessä on täsmälleen sama muoto, jossa matriisi e^{tA} on korvattu matriisilla $X(t) = e^{tA}P$.

Huomautus: Matriisi $X(t)$ ei ole matriisin e^{tA} määrittämän lineaarikuvauksen matriisi A :n ominaisvektoreiden muodostaman kannan suhteen, vaan ainoastaan vektori $\mathbf{c}$ ratkaisussa $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$ esitetään ominaisvektoreiden muodostamassa kannassa.

Huomio myös että matriisin e^{tA} käänteismatriisi saadaan muodossa e^{-tA} ja tällöin $X(t)^{-1} = P^{-1}e^{-tA}$.

Tapa 3: Homogeenisen DY-parin ratkaisu voidaan löytää kuten edellä. Kirjoitetaan sitten DY-pari differentiaalioperaattorin $D = \frac{d}{dt}$ avulla muotoon

$$\begin{cases} (D-3)x & +2y & = & t \\ -2x & +(D+2)y & = & 3e^t \end{cases}$$

Kertomalla ylempi luvulla 2 ja alempi operaattorilla $D-3$ saadaan

$$\begin{cases} 2(D-3)x & +4y & = & 2t \\ (D-3)(-2x) & +(D-3)(D+2)y & = & (D-3)3e^t, \end{cases},$$

josta $(D^2 - D - 2)y = 2t - 6e^t$, siis

$$y'' - y' - 2y = 2t - 6e^t.$$

Homogeenisen DY:n $y'' - y' - 2y = 0$ ratkaisu löytyy yrittellä $y = e^{\lambda t}$, josta saadaan algebrallinen yhtälö $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 2\}$.

DY:n yksittäisratkaisu jolle $y(0) = y'(0) = 0$ voidaan löytää Laplace-muunnoksilla: Ensinnäkin

$$s^2 Y - sY - 2Y = 2\frac{1}{s^2} - 6\frac{1}{s-1},$$

josta

$$Y = \frac{1}{s^2 - s - 2} \left(\frac{2}{s^2} - \frac{6}{s-1} \right).$$

Tästä saadaan osamurtohajotelmilla

$$Y = -\frac{11}{6} \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s} - \frac{5}{3} \frac{1}{s+1}$$

ja edelleen

$$y = -\frac{11}{6}e^{2t} + 3e^t - t + \frac{1}{2} - \frac{5}{3}e^{-t} = \underbrace{-\frac{11}{6}e^{2t} - \frac{5}{3}e^{-t}}_{y_H} + \frac{1}{2} - t + 3e^t,$$

missä y_H :lla merkitty ratkaisun osa on myös homogeenisen yhtälön ratkaisu, jolloin yksittäisratkaisuksi voidaan valita myös $y_0 = \frac{1}{2} - t + 3e^t$.

Yksittäisen ratkaisun löytämiseksi myös funktiolle x voidaan kirjoittaa

$$x' = 3x - 2y + t = 3x - 2\left(\frac{1}{2} - t + 3e^t\right) + t = 3x - 1 + 3t - 6e^t,$$

josta saadaan edellämainittujen periaatteiden perusteella ensinnäkin homogeenisen DY:n ratkaisuksi $x = e^{3t}$ ja Laplace-muunnosten avulla (reunaehdoilla $x(0) = 0$)

$$sX = 3X - \frac{1}{s} + 3\frac{1}{s^2} - 6\frac{1}{s-1},$$

josta (osamurtohajotelmien kautta) saadaan

$$X = \frac{1}{s-3} \left(-\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s-1} \right) = -\frac{3}{s-3} + \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s^2}$$

ja Laplace-käänteismuunnoksen avulla

$$x = -3e^{3t} + 3e^t - t.$$

3. Olkoon

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

4×4 Jordan-lohko ja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jollain välillä suppeneva Taylorin sarja.

Käytä sarjaa sekä lineaarialgebran tietoja ja etsi muoto matriisille $f(J)$. Vihje: Lopputulos sisältää funktion f derivaattoja diagonaalin yläpuolella.

Vastaus: Koska

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \frac{d}{d\lambda} \lambda^n & \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda^n & \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \lambda^n \\ 0 & \lambda^n & \frac{d}{d\lambda} \lambda^n & \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^n & \frac{d}{d\lambda} \lambda^n \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja $f(J) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J^n$, voidaan sarjojen summat laskea matriisialkioittain ja saada

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!} f''(\lambda) & \frac{1}{3!} f'''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!} f''(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

4. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= 4x - 4y \\ y' &= 9x - 8y \end{cases}$$

Vastaus: Matriisin $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$ ainoa ominaisarvo on -2 ja tähän liittyvät

ominaisvektorit ovat kaikki vektorin $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ monikertoja. Näin ollen tulee etsiä yleistetty ominaisvektori, joka on siis yhtälön $(A + 2I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisu. Koska $(A + 2I)^2 = 0$, toteuttavat kaikki vektorit tämän yhtälön.

Tällöin voidaan valita mikä hyvänsä vektori, joka ei ole vektorin $\mathbf{v}_1$ monikerta, esimerkiksi $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tällöin

$$e^{tA} \mathbf{v}_1 = e^{-2t} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{aligned} e^{tA} \mathbf{v}_2 &= e^{-2t} (\mathbf{v}_2 + t(A + 2I) \mathbf{v}_2) = e^{-2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} + 6te^{-2t} \\ 9te^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa näiden lineaarikombinaationa, siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} + 6te^{-2t} \\ 9te^{-2t} \end{pmatrix}$$

Huomautus: Yleistettyä ominaisvektoria $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ valittaessa ei kiinnitetty huomiota siihen, että tämä muodostaisi Jordanin ketjun ominaisvektorin $\mathbf{v}_1$ kanssa, siis että olisi $(A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Tämä ei kuitenkaan ole tärkeää DY-parin ratkaisun kannalta, ainoastaan jos haetaan Jordanin normaalimuodon välittävää matriisia P .

5. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= 4x - 4y + 2t^2 \\ y' &= 9x - 8y + e^{-t} \end{cases}$$

Vastaus: Edellisen tehtävän perusteella vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu on muotoa $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}$, missä

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & e^{-2t} + 6te^{-2t} \\ 3e^{-2t} & 9te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Yksittäisratkaisu löytyy tällöin esim. vakion varioinnilla (kts. tehtävä 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= X(t) \int X^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt \\ &= \begin{pmatrix} 5 - 7t + 4t^2 - 2t^2 e^{-2t} \\ \frac{27}{4} - 9t + \frac{9}{2}t^2 + te^{-2t} - 3t^2 e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ja koko ratkaisu saadaan yhdistämällä yksittäisratkaisu sekä homogeenisen yhtälön kaikki ratkaisut.

6. Etsi DY-parille

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{2}xy \end{cases}$$

ratakäyrät (kts. Luentoruudut 6.4.). Jos mahdollista, etsi myös eksplisiittiset esitykset funktioille x ja y , kun alkuehdot ovat $x(0) = 2$ ja $y(0) = 1$.

Vastaus: Ratakäyrien DY

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2}xy}{-2x^2} = \frac{1}{4} \frac{y}{x}$$

on separoituva. Sen ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + C,$$

josta $y = C_1 x^{\frac{1}{4}}$.

Eksplisiittinen muoto on mahdollista löytää, sillä DY-parin ensimmäinen DY on niinkään separoituva:

$$\frac{dx}{dt} = -2x^2 \Leftrightarrow \int -\frac{1}{2x^2} = \int dt + C_2,$$

josta $x = \frac{1}{2}(t + C_2)^{-1}$ ja edelleen $y = C_1(\frac{1}{2}(t + C_2)^{-1})^{\frac{1}{4}}$.

Ehto $x(0) = 2$ tarkoittaa $2 = \frac{1}{2}(0 + C_2)^{-1}$, mikä kiinnittää arvoksi $C_2 = \frac{1}{4}$.

Ehto $y(0) = 1$ niinkään kiinnittää arvoksi $C_1 = 2^{-\frac{1}{4}}$.

7. Etsi DY-parille

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

ratakäyrät 1) joko DY-parin eksplisiittisen ratkaisun kautta (esitä reaalina) tai 2) esittämällä DY-pari yhtenä $\frac{dy}{dx}$:n differentiaaliyhtälönä ja ratkaisemalla tämä. Vihje ratkaisuun: Määrittele uusi funktio $z = \frac{y}{x}$ (Jolloin $y = zx$), laske y :n derivaatta tulon derivointisäännön mukaan ja ratkaise z näin saadusta DY:stä.

Vastaus: Tapa 1: DY-pari voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matriisin A ominaisarvot ovat $1 + i$ ja $1 - i$ ja näihin liittyvät ominaisvektorit $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Näin ollen yleinen ratkaisu on muotoa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},$$

joka saadaan Eulerin kaavan perusteella muotoon

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(c_1 - c_2)e^t \cos t - (c_1 + c_2)e^t \sin t \\ (c_1 + c_2)e^t \cos t + i(c_1 - c_2)e^t \sin t \end{pmatrix}$$

Jos vakiot $c_1 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ja c_2 valitaan siten, että $c_2 = c_1^*$, saadaan kaikki kertoimet reaaliksi; tällöin $i(c_1 - c_2) = -2\beta$ ja $c_1 + c_2 = 2\alpha$ ja

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta e^t \cos t - 2\alpha e^t \sin t \\ 2\alpha e^t \cos t - 2\beta e^t \sin t \end{pmatrix}$$

Kyseessä on siis ratakäyrien parametrimuoto.

Huomautus: Suoraan laskemalla saadaan

$$x^2 + y^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)e^{2t},$$

josta

$$r = 2|c_1|e^t.$$

Tästä nähdään, että ratakäyrät ovat logaritmisia spiraaleja.

Selitys: Käyrän tangentin suunta on (x', y') ja suunta origosta pisteeseen (x, y) on $(x, y) - (0, 0) = (x, y)$. Suoraan laskemalla $(x')^2 + (y')^2 = 2x^2 + 2y^2$ ja tätä käyttämällä saadaan edellämainittujen suuntien kulman kosini:

$$\frac{(x', y') \cdot (x, y)}{\|(x', y')\| \cdot \|(x, y)\|} = \frac{x'x + y'y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} = \frac{(x - y)x + (x + y)y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Näin ollen DY-pari määrittää parametrimuotoisen käyrän, jonka tangentti on 45 asteen kulmassa origosta lähtevään, käyrän leikkaavaan suoraan. Tällaiset käyrät ovat logaritmisia spiraaleja.

Tapa 2: Vastaus: differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Jos sijoitetaan $z = \frac{y}{x}$, on $y = zx$ ja $y' = z'x + z$ ja yhtälö saa muodon

$$z'x + z = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^2}{1-z},$$

joka on separoituva:

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1+z^2}{1-z} \Rightarrow \int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx + C$$

ja edelleen

$$\arctan z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln x + C.$$

Sijoittamalla $z = \frac{y}{x}$ saadaan ratkaisuksi

$$\arctan \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + C \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Huomautus:

Näin saatua yhtälöä voidaan myös tulkita napakoordinaattimuodossa: $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ on pisteen (x, y) vaihekulma ja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ sen etäisyys origosta. Näin ollen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\theta - \ln r = C \Leftrightarrow r = e^{-C} e^\theta = B e^\theta.$$

Tämän muodon perusteella ratakäyrät ovat logaritmisiä spiraaleja.