

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 6, 19.4. 2022

1. Palauta kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x''' + 4x'' + 5x' - x = 2t$$

differentiaaliyhtälöryhmäksi, jossa esiintyy vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja. Ohje: Määrittele uudet funktiot y ja z luento-esimerkin mukaisesti.

Vastaus:

Jos merkitään $x' = y$ ja $y' = z$, on $z' = y'' = x'''$ saadaan DY muotoon $z' + 4z + 5y - x = 2t$ ja DY-ryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= -4z - 5y + x + 2t \end{cases}$$

Huomautus: Runge-Kutta -tyyppiset menetelmät soveltuvat nimenomaan ensimmäistä kertalukua oleviin DY-rymiin, joten tämänkaltaisen reduktio saat-
taa olla tarpeellinen numeeristen menetelmien soveltamista varten.

2. Olkoon x syöte ja y tuloste, joille pätee differentiaaliyhtälö

$$y'' - y = 2x' - x.$$

Määritä systeemin siirtofunktio. Ohje: Luentoruudut

Vastaus: Laplace-muunnokset laskemalla puolittain saadaan $s^2Y - Y = 2sX - X$, josta

$$Y = \frac{2s - 1}{s^2 - 1}X$$

Siirtofunktio on siis

$$G(s) = \frac{2s - 1}{s^2 - 1}.$$

3. Onko edellisen tehtävän systeemi stabiili? Ohje: Stabiilisuus määräytyy siirtok-
funktion napojen mukaan, kts. luentoruudut.

Vastaus: Siirtokfunktion $G(s)$ osoittajan nollakohta on $s = \frac{1}{2}$ ja nimittäjän
nollakohdat ovat ± 1 . Näin ollen siirtokfunktiolla on napa $z = 1$, jonka reaaliosa
on > 0 . Systeemi ei siis ole stabiili.

4. Selvitä onko differentiaaliyhtälön

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = x' - x$$

määrittämä systeemi stabiili.

Vastaus: Siirtokfunktion määrittämistä varten lasketaan Laplace-muunnokset
puolittain:

$$s^3Y + 2s^2Y - sY - 2Y = sX - X,$$

josta

$$Y = \frac{s - 1}{s^3 + 2s^2 - s - 2}X.$$

Siirtofunktion $G(s) = \frac{s-1}{s^3+2s^2-s-2}$ nimittäjällä on kuitenkin nollakohta $s = 1$, joten se jakautuu tekijöihin $s^3 + 2s^2 - s - 2 = (s-1)(s+1)(s+2)$, ja tällöin siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Näin ollen siirtofunktion navat ovat $s = -1$ ja $s = -2$, jotka ovat molemmat negatiivisia ja systeemi on näin ollen stabiili.

5. Määritä jonolle $x_n = na^n$ Z -muunnos. Ohje: Hyödynnä ensin muunnos jonolle a^n (luennoilla) ja kokeile derivointia z :n suhteen.

Vastaus: Luennolla esitetyn mukaan

$$\mathcal{Z}[a^n] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}.$$

Derivoimalla yhtälö

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$$

puolittain saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} -na^n z^{-n-1} = \frac{-a}{(z-a)^2}$$

ja tästä edelleen

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n z^{-n} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Tästä nähdään, että

$$\mathcal{Z}[na^n] = \frac{az}{(z-a)^2}$$

6. Määritellään lukujono x_n ehdoilla $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ ja

$$x_{n+2} = nx_{n+1} + x_n.$$

Käytä Z -muunnoksia selvittääksesi millainen eksplisiittinen lauseke saadaan jonolle x_n .

Vastaus: Olkoon F jonon x_n Z -muunnos, siis

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Jonon nx_{n+1} Z -muunnos saadaan soveltamalla edellisen tehtävän ideaa seuraavasti:

$$F = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{-n-1},$$

josta

$$zF = x_0 z + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{-n}$$

ja derivoimalla saadaan

$$F + zF' = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-n)x_{n+1} z^{-n-1},$$

ja

$$zF + z^2F' = x_0z - \sum_{n=0}^{\infty} nx_{n+1}z^{-n}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{Z}[nx_{n+1}](z) = x_0z - z\mathcal{Z}[x_n] - z^2\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[x_n].$$

Jos siis merkitään symbolilla Z jonon x_n Z -muunnosta, saadaan rekursioyhtälöstä

$$z^2Z - x_1z - x_0z^2 = x_0z - zZ - z^2Z' + Z.$$

Alkuarvot $x_0 = x_1 = 1$ sijoittamalla saadaan yhtälö muotoon

$$z^2Z' + (z^2 + z - 1)Z = z^2 + 2z,$$

ja $x_0 = 1$ tuottaa alkuehdon $Z(0) = 1$. Homogeenisen version ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\frac{Z'_H}{Z_H} = -\frac{z^2 + z - 1}{z^2} = -1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2},$$

josta $Z_H = Cz^{-1}e^{-z-\frac{1}{z}}$. Yksittäisratkaisu löytyy periaatteessa vakion varioinnilla. Tämän lisäksi on etsittävä käänteinen Z -muunnos näin saadulle ratkaisulle $Z(z)$ (työläs, lopullista muotoa ei vaadita ratkaisun yhteydessä).

7. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella

$$f(x, y) = \frac{x^3y}{x^6 + y^2}.$$

Selvitä mikä funktion f raja-arvo origossa $(0, 0)$, kun origoa lähestytään suoraa $y = kx$ pitkin. Ohje: Sijoita $y = kx$ ja määritä raja-arvo kun $x \rightarrow 0$.

Vastaus: Jos $y = kx$, ja $k \neq 0$, on

$$f(x, y) = \frac{x^3 \cdot kx}{x^6 + (k \cdot x)^2} = \frac{kx^2}{x^4 + k^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Jos $k = 0$, on $f(x, y) = \frac{0}{x^6} = 0$, joten tässäkin tapauksessa raja-arvo on 0.

Huomautus: Tämän tehtävän perusteella funktion $f(x, y)$ raja-arvo näyttää olevan 0, mikäli pistettä $(0, 0)$ lähestytään jotain suoraa $y = kx$ pitkin.

8. Selvitä edellisen tehtävän funktion raja-arvo origossa, kun origoa lähestytään käyrää $y = kx^3$ pitkin. Voiko eri k :n arvoja kohti löytyä erilaisia raja-arvoja? Ohje: Samoin kuin edellisessä tehtävässä.

Vastaus: Olkoon $y = kx^3$, missä $k \neq 0$ on joku reaalinen vakio. Tällöin

$$f(x, kx^3) = \frac{x^3 \cdot kx^3}{x^6 + (kx^3)^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Näin ollen raja-arvo riippuu siitä mitä kolmannen asteen käyrää $y = kx^3$ pitkin origoa lähestytään.

9. Määritellään funktio $f(x, y, z) = \cos(xy^2z^3)$. Laske osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ja $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Vastaus:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(xy^2z^3) = -\sin(xy^2z^3) \cdot y^2z^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \cos(xy^2z^3) = -\sin(xy^2z^3) \cdot 2yxz^3$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial z} \cos(xy^2z^3) = -\sin(xy^2z^3) \cdot 3z^2xy^2$$