

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 7, 26.4. 2022

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ määritelty funktio $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Mikä on funktion f Jacobin matriisi? Entä mikä tämä matriisi on jos $(r, \theta) = (3, \frac{3\pi}{2})$?
2. Etsi funktiolle $f(r, \theta)$ paras mahdollinen lineaarifunktioapproksimaatio pisteessä $(3, \frac{3\pi}{2})$. Tarkennus: Etsi pyydetyn funktion matriisi luonnollisten kantojen suhteen esitettynä.
3. Olkoon $f(x, y) = 3x + x^2 - y^3$. Oletetaan, että arvot $(x, y) = (200, 300)$ ovat mitattuja, ja näissä voi olla mittausvirhettä $|dx| \leq 1$ ja $|dy| \leq 2$. Arvioi kokonaisdifferentiaalilla avulla kuinka paljon mittausvirhe voi vaikuttaa arvoon $f(200, 300)$.
4. Säiliön sisälämpötilaa edustaa lauseke $T(x, y, z) = 3xy^2z^3 + x^3y^2z + xy^2z^2$. Esinettä pisteessä $(1, 1, 1)$ tahdotaan siirtää suuntaan, jossa lämpötila laskisi mahdollisimman nopeasti. Mihin suuntaan silloin esinettä pitäisi siirtää?
5. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y$ suurin ja pienin arvo kolmiossa (sisältää reunan), jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$. Ohje: suora $y = -x + 1$ kulkee kahden kärkipisteen kautta.
6. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y$ suurin ja pienin arvo yksikköympyrällä $x^2 + y^2 - 1 = 0$ käyttämällä Lagrangen kertoimen menetelmää.
7. Laske funktion $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y$ integraali yli suorakulmion $[0, 2] \times [0, 3]$
8. Laske funktion $f(x, y) = 2x - y$ integraali yli kolmion, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$. Ohje: Kolmion kahta kärkipistettä yhdistää suora $y = -x + 1$, joten jos esimerkiksi x ulompana integrointimuuttujana käy läpi välin $[0, 1]$, niin y sisempänä muuttujana kulkee välin $[0, -x + 1]$. Integrointijärjestys voidaan valita myös toisin.
9. Olkoon A alue jota rajoittaa y -akselin väli $[0, 1]$, jana pisteestä $(0, 1)$ pisteeseen $(1, 1)$ ja käyrä $y = \sqrt{x}$. Laske funktiolle $f(x, y) = e^{y^3}$ integraali

$$\int_A f.$$