

Insinöörimatematiikka 4

Demonstraatio 7, 26.4. 2022

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ määritelty funktio $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Mikä on funktion f Jacobin matriisi? Entä mikä tämä matriisi on jos $(r, \theta) = (3, \frac{3\pi}{2})$?

Vastaus: Jacobin matriisi on (kun muuttujat numeroidaan järjestyksessä r, θ)

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Pisteessä $(r, \theta) = (3, \frac{3\pi}{2})$ tämä saa arvon

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Etsi funktiolle $f(r, \theta)$ paras mahdollinen lineaarifunktioapproksimaatio pisteessä $(3, \frac{3\pi}{2})$. Tarkennus: Etsi pyydetyn funktion matriisi luonnollisten kantojen suhteen esitettynä.

Vastaus: Luonnollisten kantojen suhteen kysytty matriisi on

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Olkoon $f(x, y) = 3x + x^2 - y^3$. Oletetaan, että arvot $(x, y) = (200, 300)$ ovat mitattuja, ja näissä voi olla mittausvirhettä $|dx| \leq 1$ ja $|dy| \leq 2$. Arvioi kokonaisdifferentiaalilla kuinka paljon mittausvirhe voi vaikuttaa arvoon $f(200, 300)$.

Vastaus: Kokonaisdifferentiaali on

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (3 + 2x) dx - 3y^2 dy.$$

Tähän sijoitettuna lukuarvot antavat arvion

$$\begin{aligned} |df| &= |(3 + 2 \cdot 200) dx - 3 \cdot 300^2 dy| \\ &\leq 403 |dx| + 270000 |dy| \leq 403 \cdot 1 + 270000 \cdot 2 = 540403. \end{aligned}$$

Mittausarvoon $3 \cdot 200 + 200^2 - 300^3 = -26959400$ nähden tämä mittausvirhe on kuitenkin varsin vähäinen.

4. Säiliön sisälämpötilaa edustaa lauseke $T(x, y, z) = 3xy^2z^3 + x^3y^2z + xy^2z^2$. Esinettä pisteessä $(1, 1, 1)$ tahdotaan siirtää suuntaan, jossa lämpötila laskisi mahdollisimman nopeasti. Mihin suuntaan silloin esinettä pitäisi siirtää?

Vastaus: Lämpötilan nopein muutos tapahtuu gradientin suunnassa. Tässä tapauksessa

$$\nabla T = (3y^2z^3 + 3x^2y^2z + y^2z^2, 6xyz^3 + 2x^3yz + 2zyz^2, 9xy^2z^2 + x^3y^2 + 2xy^2z)$$

Gradientti pisteessä $(1, 1, 1)$

On siis $T(3 + 3 + 1, 6 + 2 + 2, 9 + 1 + 2) = (7, 10, 12)$

5. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y$ suurin ja pienin arvo kolmiossa (sisältää reunan), jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$. Ohje: suora $y = -x + 1$ kulkee kahden kärkipisteen kautta.

Vastaus: Ääriarvot löytyvät joko sisäosasta tai reunoilta.

$$\nabla f(x, y) = (4x - 1, 2y - 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Tämä piste kuuluu sisäosaan, ja $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$

Tarkastellaan reunaa $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$. Tällä reunalla $f_1(y) = f(0, y) = y^2 - y$.
 $f'_1(y) = 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$, ja $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Tarkastellaan reunaa $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Tällä reunalla $f_2(x) = f(x, 0) = 2x^2 - x$.
 $f'_2(x) = 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, ja $f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{8}$

Tarkastellaan reunaa $y = -x + 1$, $0 \leq x \leq 1$. Tällä reunalla $f_3(x) = 2x^2 - x + (-x + 1)^2 - (-x + 1) = 3x^2 - 2x$.
 $f'_3(x) = 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ja $f_3\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

Tarkastetaan vielä arvot reunojen päätepisteissä (kolmion kärkipisteet): $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 0) = 1$.

Näistä huomataan, että funktiolla on suurin arvo 1 ja pienin arvo $-\frac{3}{8}$.

6. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y$ suurin ja pienin arvo yksikköympyrällä $x^2 + y^2 - 1 = 0$ käyttämällä Lagrangen kertoimen menetelmää.

Vastaus: Merkitään

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

jolloin $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$ ja $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{cases}$$

Jos $x = 0$, saa ryhmä muodon

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda y &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0. \end{cases}$$

ja alimmasta yhtälöstä $y = \pm 1$. Jos taas $x \neq 0$, saadaan ylin yhtälö muotoon $1 + \lambda = 0$, josta $\lambda = -1$ ja tällöin toinen yhtälö saadaan muotoon $1 - 2y = 0$, josta $y = \frac{1}{2}$. Tällöin alimmasta yhtälöstä saadaan $x^2 = \frac{3}{4}$, siis $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lasketaan funktion f arvot mahdollisissa pisteissä: $f(0, 1) = 1$, $f(0, -1) = -1$, $f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Näin ollen suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin -1 .

7. Laske funktion $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y$ integraali yli suorakulmion $[0, 2] \times [0, 3]$

Vastaus:

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \int_0^3 (2x^2 - x + y^2 - y) dy dx \\ &= \int_0^2 \left/ \int_0^3 (2x^2 y - xy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2) dy \right. dx \\ &= \int_0^2 (6x^2 - 3x + 9 - \frac{9}{2}) dx \\ &= \left/ \int_0^2 (2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x) \right. \\ &= 16 - 6 + 9 = 19. \end{aligned}$$

8. Laske funktion $f(x, y) = 2x - y$ integraali yli kolmion, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$. Ohje: Kolmion kahta kärkipistettä yhdistää suora $y = -x + 1$, joten jos esimerkiksi x ulompana integrointimuuttujana käy läpi välin $[0, 1]$, niin y sisempänä muuttujana kulkee välin $[0, -x + 1]$. Integrointijärjestys voidaan valita myös toisin.

Vastaus:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{-x+1} (2x - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left/ \int_0^{-x+1} (2xy - \frac{1}{2}y^2) dy \right. dx \\ &= \int_0^1 (2x(-x + 1) - \frac{1}{2}(-x + 1)^2) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(-5x^2 + 6x - 1) dx \\ &= \left/ \int_0^1 \frac{1}{2}(-\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - x) \right. \\ &= -\frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

9. Olkoon A alue jota rajoittaa y -akselin väli $[0, 1]$, jana pisteestä $(0, 1)$ pisteeseen $(1, 1)$ ja käyrä $y = \sqrt{x}$. Laske funktiolle $f(x, y) = e^{y^3}$ integraali

$$\int_A f.$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy \\ &= \int_0^1 \left/ \int_0^{y^2} e^{y^3} dx \right. dy \\ &= \left/ \int_0^1 \frac{1}{3} e^{y^3} dy \right. \\ &= \frac{1}{3}(e - 1). \end{aligned}$$