

Insinöörimatematiikka 4

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

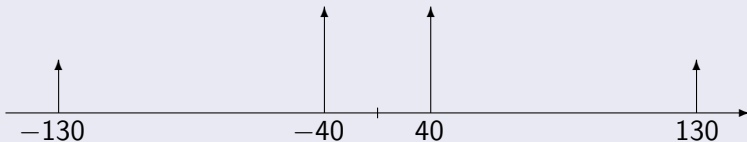
Esimerkki

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t),$$

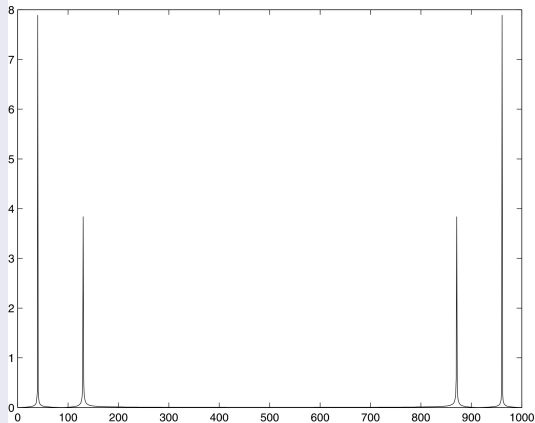
$$\mathcal{F}[s(t)](f) = \frac{1}{4i} \delta(f-40) - \frac{1}{4i} \delta(f+40) + \frac{1}{8i} \delta(f-130) - \frac{1}{8i} \delta(f+130)$$

$$|\mathcal{F}[s(t)](f)| = \frac{1}{4} \delta(f-40) + \frac{1}{4} \delta(f+40) + \frac{1}{8} \delta(f-130) + \frac{1}{8} \delta(f+130)$$

Amplitudispektrin kuvaaja



Amplitudispektri numeerisesti



Lause

- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $x\delta(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
- $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$ kun $a > 0$
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Huomautus

Yleensä

$$\mathcal{F}[f \cdot g] \neq \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

mutta modulaatioperiaatteen mukaan

$$\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi i y_0 x}](y) = F(y - y_0)$$

Määritelmä

Funktioiden f ja g konvoluutio:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t) dt$$

Lause

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$
- $D(f * g) = Df * g = f * Dg$

Lause

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$$

Esimerkki

Esimerkit 47–48 (vuoden 2019 moniste)

Esimerkki

$$f * \delta$$

Määritelmä

$$H(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0 \end{cases}$$

Määritelmä

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x),$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t)dt$$

Esimerkki 52 (vuoden 2019 moniste)

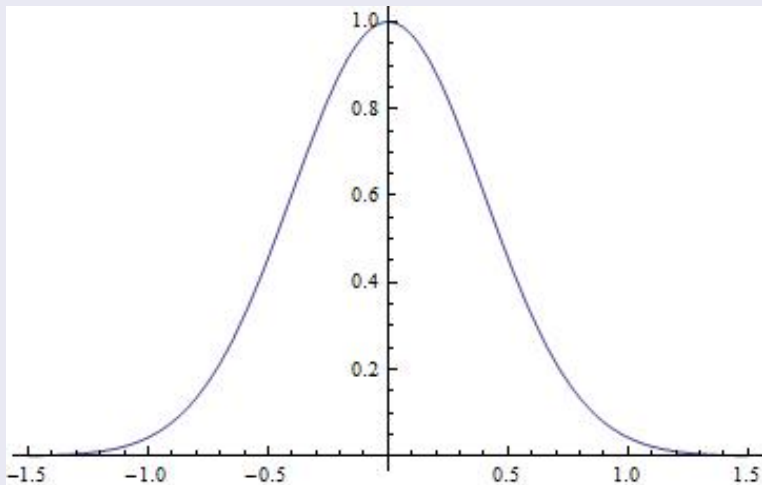
Derivointiperiaate:

$$\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi iy \mathcal{F}[f(x)](y)$$

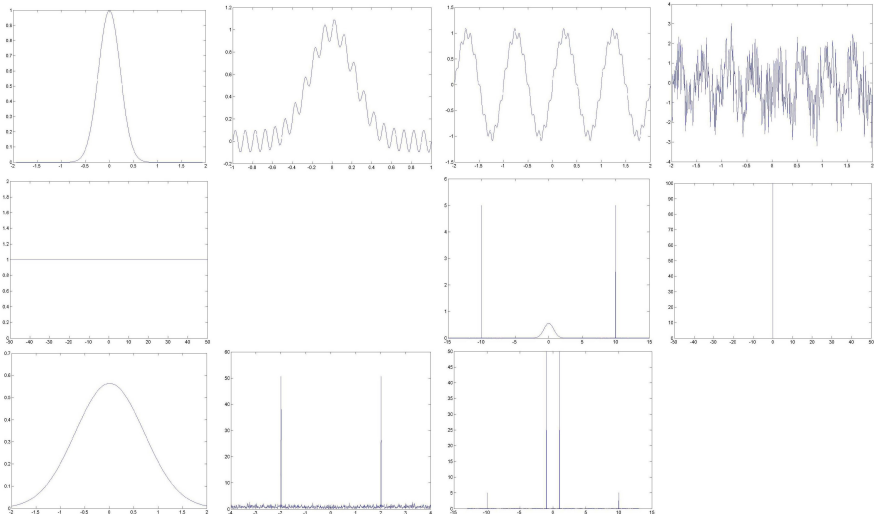
Integrointiperiaate ?

Signaali vs. amplitudispektri

Gaussin kellokäyrä (normittamaton) $\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](y) = e^{-\pi y^2}$



Signaali vs. amplitudispektri



Huomautus

Jos $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$, on

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i xy} dx$$

ja siksi

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \alpha_0$$

Yleistys

Jos $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$, on

$$\begin{aligned} F^{(n)}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi ix)^n f(x)e^{-2\pi ixy} dx \\ &= (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)e^{-2\pi ixy} dx \end{aligned}$$

ja $F^{(n)}(0) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$, siis

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}.$$

Huomautus

Jos $|f|^2$ on todennäköisyysjakauma, niin myös $|F|^2$ on sellainen. Tämä seuraa Parsevalin kaavasta:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2 dy$$

Signaali käytännössä

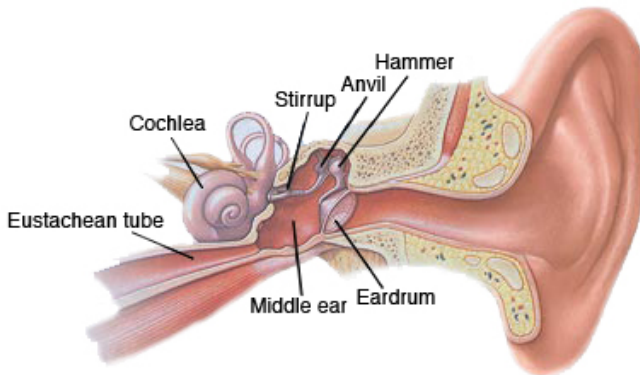
Sovelluksissa f on yleensä ajan myötä muuttuva fysikaalinen suure. Esimerkiksi

- Ilmanpaineen vaihtelu (ääni)
- Jännitteen vaihtelu (lankapuhelimet, DSL-linjat)
- Sähkö- ja magneettikentän vaihtelu (esim. valo, radioaallot)

Huomautus

Sovelluksissa ei yleensä voida saada eksplisiittistä lauseketta $f(x)$:lle. Tästä seuraa, että spektrin laskeminen tavallisin differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin analyttisesti ei onnistu.

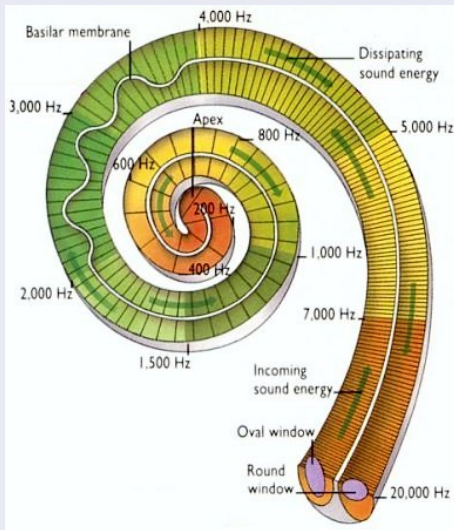
Korvan rakenne



© Mayo Foundation for Medical Education and Research. All rights reserved.

Analoginen "Fourier-muunnin"

Korvasimpukka



Signaali käytännössä

- Sovelluksissa ei voida yleensä tuntea signaalia $f(x)$ miten tarkasti tahansa.
- Käytännössä joudutaan tyytymään *näytteisiin* $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... ja vieläpä näidenkin likiarvoihin.
- Signaalin korkeat taajuudet jäävät taltioimatta. Määre "korkeat", riippuu näytteenottopisteiden x_0 , x_1 , x_2 , ... välistä.
- Esimerkki: CD-audio -standardia varten mikrofonin tulee taltioda ilmanpaineen arvo 44100 kertaa sekunnissa. Kukin taltiointi (näyte) esitetään 16 bittiä käyttäen. Stereoääntä varten tarvitaan tällöin $2 \cdot 44100 \cdot 16 \text{ b}$ ($\approx 172 \text{ kB}$) sekunnissa.