

Insinöörimatematiikka 4

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Signaali käytännössä

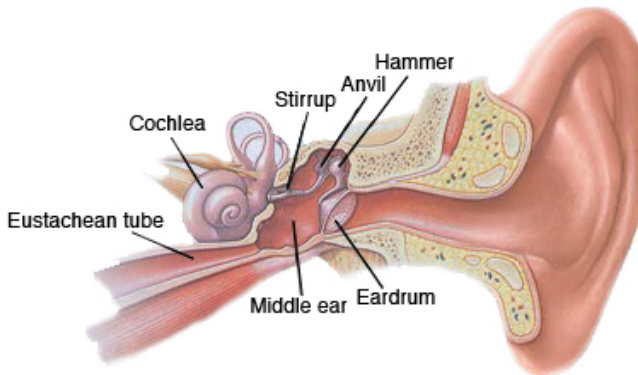
Sovelluksissa f on yleensä ajan myötä muuttuva fysikaalinen suure. Esimerkiksi

- Ilmanpaineen vaihtelu (ääni)
- Jännitteen vaihtelu (lankapuhelimet, DSL-linjat)
- Sähkö- ja magneettikentän vaihtelu (esim. valo, radioaallot)

Huomautus

Sovelluksissa ei yleensä voida saada eksplisiittistä lauseketta $f(x)$:lle. Tästä seuraa, että spektrin laskeminen tavallisin differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin analyttisesti ei onnistu.

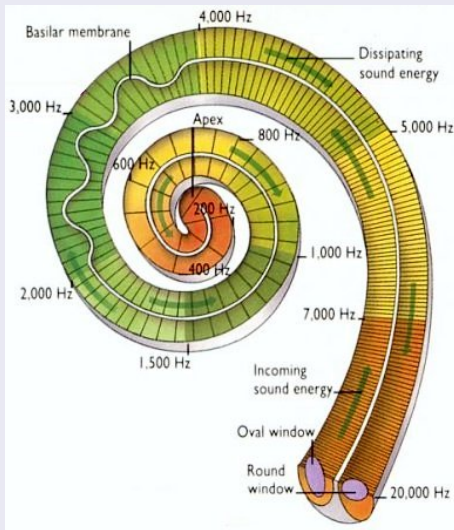
Korvan rakenne



© Mayo Foundation for Medical Education and Research. All rights reserved.

Analoginen “Fourier-muunnin”

Korvasimpukka



Signaali käytännössä

- Sovelluksissa ei voida yleensä tuntea signaalia $f(x)$ miten tarkasti tahansa.
- Käytännössä joudutaan tyytymään *näytteisiin* $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... ja vieläpä näidenkin likiarvoihin.
- Signaalin korkeat taajuudet jäävät taltioimatta. Määre "korkeat", riippuu näytteenottopisteiden x_0 , x_1 , x_2 , ... välistä.
- Esimerkki: CD-audio -standardia varten mikrofonin tulee taltioida ilmanpaineen arvo 44100 kertaa sekunnissa. Kukin taltiointi (näyte) esitetään 16 bittiä käyttäen. Stereoääntä varten tarvitaan tällöin $2 \cdot 44100 \cdot 16 \text{ b}$ ($\approx 172 \text{ kB}$) sekunnissa.

Määritelmä

Sanotaan, että funktio

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy$$

sisältää taajuuden y , jos $F(y) \neq 0$ tai $F(-y) \neq 0$.

Jos funktio f ei sisällä B :tä korkeampia taajuuksia, on siis $F(y) = 0$, kun $|y| \geq B$

Esimerkki

Esimerkki 55 (vuoden 2019 moniste)

Nyquistin-Shannonin näytteenottolause

Jos funktio f ei sisällä B :tä eikä sitä korkeampia taajuuksia, voidaan f epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta selvittää arvoista $d_n = f(\frac{n}{2B})$.

Lisäksi pätee (Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n)$$

Huomautus

Nyquistin-Shannonin näytteenottolauseessa esiintyvää taajuutta $2B$ kutsutaan Nyquistin näytteenottotaajuudeksi ja väliä $\frac{1}{2B}$ sanotaan Nyquistin näytteenottoväliksi.

Nyquistin-Shannonin lauseen todistus

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy.$
- Arvot $\frac{d_{-n}}{2B} = \frac{1}{2B}f(\frac{-n}{2B}) = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B F(y)e^{-\frac{2\pi in}{2B}y} dy$ ovat spektrin $F(y)$ Fourier-kertoimet, joten

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi in}{2B}y}.$$

- $f(x) = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy = \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n).$

Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava

Kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n) \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta\left(x - \frac{n}{2B}\right) \right) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx) \end{aligned}$$

Huomautus

Jos $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(y)](x)$, on

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(y) \cdot \Pi\left(\frac{y}{2B}\right)\right](x) = f(x) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx)$$

Tulkinta

Näytteistä $d_n = f(\frac{n}{2B})$ rekonstruoidaan alkuperäinen signaali seuraavasti:

- Muodostetaan “Diracin kampa”

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B})$$

- Leikataan tästä taajuuden B ylittävät osat kertomalla spektri pulssifunktiolla $\Pi(\frac{y}{2B})$.
- Tulos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - \frac{n}{2B}) * 2B \operatorname{sinc}(2Bx).$$

Jatkuvan ja pistespektrin yhdistäminen

Fourierin integraali

Integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i xy} dy$$

spektri $F(y)$ on määritelty kaikilla $y \in \mathbb{R}$ (jatkuva spektri).

Fourierin sarja

Sarjassa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

spektri F_n on määritelty vain n :n kokonaislukuarvoilla (F_n vastaa taajuutta $\frac{n}{T}$). Tätä kutsutaan pistespektriksi.

Pistespektri integraalissa

Jos $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$, määritellään $F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T})$.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y} dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T}) e^{2\pi i x y} dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{2\pi i x \frac{n}{T}}. \end{aligned}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Signaali f on aikarajoitettu, jos on sellainen väli $[0, M]$, että $f(x) = 0$ aina kun $x \notin [0, M]$.

Tasaväliset näytteet

Olkoon f aikarajoitettu välille $[0, M]$ ja $M = N \cdot \Delta x$. Merkitään $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(\Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, $\dots$, $f_{N-1} = f((N-1)\Delta x)$

Huomatus

Nyquistin-Shannonin lauseen mukaan vain arvoa $B = \frac{1}{2\Delta x}$ matalammat taajuudet voidaan rekonstruoida.

Huomautus

Spektrin rekonstruktio Fourier-sarjana

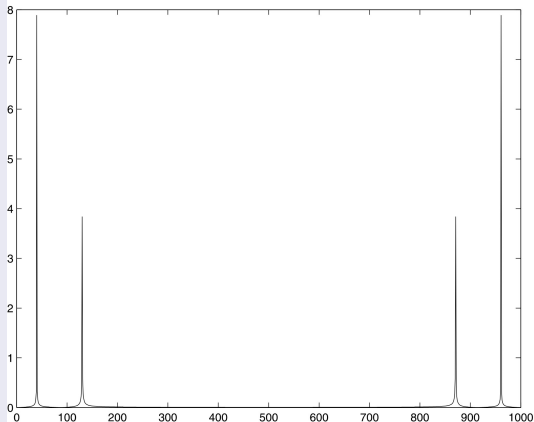
$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi i n}{2B} y}.$$

on $2B$ -jaksoinen funktio ja tätä voidaan tarkastella välillä $[-B, B]$ tai yhtä hyvin välillä $[0, 2B]$.

Valitaan spektrin tarkasteluväliksi $[0, 2B]$ symmetrian vuoksi.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Signaali $\frac{1}{2}s_{40}(t) + \frac{1}{4}s_{130}(t)$ amplitudispektri



Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Ongelma: DFT:n muotoilu

Jos $M = N \cdot \Delta x$ ja signaalista tunnetaan vain arvot $f_0 = (0 \cdot \Delta x)$, $f_1 = (1 \cdot \Delta x)$, $f_2 = f(2 \cdot \Delta x)$, ..., $f_{N-1} = f((N-1) \cdot \Delta x)$, kuinka tiheästi voidaan spektrin arvo määrittää välillä $[0, 2B]$?

Duaaliperiaate

Tarkastellaan spektriä F välillä $[0, 2B]$ määriteltynä funktiona ja $f(-x)$:ää tämän välillä $[-M, 0]$ (tai välillä $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$) määriteltynä spektrinä. Tällöin voidaan välein $\Delta y = \frac{1}{2 \cdot \frac{M}{2}} = \frac{1}{M} = \frac{1}{N \Delta x}$ rekisteröidystä F :n arvoista rekonstruoida F uudelleen.

DFT:n muotoilu

Asetetaan $\Delta y = \frac{1}{N \Delta x}$ ja lasketaan spektrin arvot pisteissä $0 \cdot \Delta y$, $1 \cdot \Delta y$, ..., $(N-1) \cdot \Delta y$. Valitaan symmetrian vuoksi $\Delta y = \Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

DFT:n muotoilu

Integraalia

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i xy} dx = \int_0^{N\Delta x} f(x) e^{-2\pi i xy} dx$$

approksimoidaan Riemann-summalla

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta x) e^{-2\pi i k\Delta x \cdot y} \Delta x$$

ja tälle lausekkeelle lasketaan arvo F_l pisteissä $y = l \cdot \Delta y$. Tällöin

$$F_l = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k\Delta x \cdot l \cdot \Delta y} \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jonon $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$, missä

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Huomautus

Määritelmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \dots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \times$$

$$\begin{pmatrix} e^{-2\pi i \frac{0 \cdot 0}{N}} & e^{-2\pi i \frac{1 \cdot 0}{N}} & \dots & e^{-2\pi i \frac{(N-1) \cdot 0}{N}} \\ e^{-2\pi i \frac{0 \cdot 1}{N}} & e^{-2\pi i \frac{1 \cdot 1}{N}} & \dots & e^{-2\pi i \frac{(N-1) \cdot 1}{N}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ e^{-2\pi i \frac{0 \cdot (N-1)}{N}} & e^{-2\pi i \frac{1 \cdot (N-1)}{N}} & \dots & e^{-2\pi i \frac{(N-1) \cdot (N-1)}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{f}, \text{ missä } U_{kl} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi i k l}{N}}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{jos } 1 \leq l < N \\ N, & \text{jos } l = 0 \end{cases}$$

Todistus

Tapaus $l = 0$ on ilmeinen. Jos $l \neq 0$, on $e^{\frac{2\pi i l}{N}} \neq 1$ ja

$$e^{\frac{2\pi i l}{N}} S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i l}{N}} e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (k+1) l}{N}} = S$$

Täten

$$(e^{\frac{2\pi i l}{N}} - 1)S = 0,$$

mistä seuraa, että $S = 0$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Lause: Matriisi U on unitaarinen, ts. $U^* U = I$

Todistus:

$$\begin{aligned}(U^* U)_{rs} &= \sum_{k=0}^{N-1} (U^*)_{rk} U_{ks} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{U_{kr}} U_{ks} \\&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k r}{N}} e^{\frac{-2\pi i k s}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k (r-s)}{N}} \\&= \begin{cases} 1, & \text{jos } r = s \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}\end{aligned}$$

Näin ollen $U^* U = I$ ja siis $U^{-1} = U^*$.

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Määritelmä

Jono $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on jono $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, missä

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}.$$

Merkintä:

$$(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = \text{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$$

Huomautus

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{U}^*\mathbf{F}.$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Seuraus

$$\text{DFT}^{-1} \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$$

Määritelmä

Olkoon $S_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Äärellisen joukon k -taajuinen eksponenttifunktio on

$$e_k(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

Huomautus

$$e_{N-k}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(N-k)l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i l} e^{2\pi i \frac{-kl}{N}} = e_{-k}(l)$$

Seuraus (N -jaksollisuus)

$$e_k(l + N) = e_k(l)$$

Esimerkki

Esimerkki 57

Huomautus

Jos jokainen F_l lasketaan esityksen

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}}$$

mukaisesti, pitää jonon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$ määrittämiseksi suorittaa likimain $N \cdot 2N = 2N^2$ yhteen- ja kertolaskua. Lisäksi pitää laskea eksponenttifunktion arvot.

Hajoita ja hallitse -menetelmä

Ongelman ratkaisua varten

- Syöte S hajoitetaan osiin S_1 ja S_2
- Ratkaistaan ongelma osille S_1 ja S_2 erikseen
- Yhdistetään osaratkaisut

Fast Fourier Transform (FFT)

DFT:n hajoitus

$$\begin{aligned} F_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k \cdot l}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{2m \cdot l}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{(2m+1) \cdot l}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{m \cdot l}{N/2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \frac{l}{N}} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{m \cdot l}{N/2}} \end{aligned}$$

Fast Fourier Transform (FFT)

Algoritmi

Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1})$

Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos

$(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{FFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$.

- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.
- Jos $N > 1$, laske $(G_0, G_1, \dots, G_{N/2-1}) = \text{FFT}(f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$ ja $(H_0, H_1, \dots, H_{N/2-1}) = \text{FFT}(f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$.
- Jokaista $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ kohti laske $F_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_l + e^{-2\pi i \frac{l}{N}} H_l)$. Luvun $N/2 - 1$ ylittäville l :n arvoille tulkitaan $G_l = G_{l-N/2}$ ja $H_l = H_{l-N/2}$.
- Tulosta $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$.

Operaatioiden määrä FFT:ssä (kompleksisuus)

Olkoon $N = 2^r$ ja $T(N)$ aritmeettisten operaatioiden määrä, jotka tarvitaan N -pituisen jonon diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen.

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + 4N$$

Tällöin

$$\begin{aligned} T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2(2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\ &= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\ &= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \\ &= 16T(N/16) + 4 \cdot 4N = \dots \\ &= 2^r T(N/2^r) + r \cdot 4N \\ &= NT(1) + r \cdot 4N = 4N \log_2 N \end{aligned}$$