

Insinöörimatematiikka 4

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Lause

Jos funktiot a_i ovat jatkuvia, on homogeenisella DY:llä

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua $y_1, \dots, y_n$ ja yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaationa:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Lause

Jos funktiot a_i ja b ovat jatkuvia, ovat epähomogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

kaikki ratkaisut muotoa

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_0,$$

missä $y_1, \dots, y_n$ ovat homogeenisen DY:n riippumattomat ratkaisut ja y_0 epähomogeenisen DY:n yksittäisratkaisu.

Vertaa:

Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kaikki ratkaisut ovat muotoa $c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_0$, missä $\mathbf{x}_i$ ovat homogeenisen ryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ riippumattomat ratkaisut ja $\mathbf{x}_0$ alkuperäisen ryhmän yksittäisratkaisu.

Huomautus

Vakiokertoimisen homogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ratkaisuja voidaan löytää yritteellä $y = e^{\lambda t}$: Tällöin $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$ ja sijoittamalla saadaan

$$a_n \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

ja jakamalla $e^{\lambda t}$ pois

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Algebran peruslauseen mukaan tällä *karakteristisella yhtälöllä* on ratkaisu.

Lause

Jos λ_j on karakteristisen yhtälön j -kertainen juuri, on vakiokertoimisella homogeenisella DY:llä lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{j-1} e^{\lambda_j t}.$$

Huomautus

Jos reaalikertoimisella karakteristisella polynomilla on kompleksinen juuri λ , on myös tämän liittoluku $\bar{\lambda}$ myös ratkaisu. Jos halutaan pidättäytyä reaalisisissa ratkaisuisissa, merkitään $\lambda = \alpha + i\beta$ ja ratkaisut $e^{\lambda t}$ ja $e^{\bar{\lambda} t}$ voidaan korvata reaalisilla ratkaisuilla $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ja $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Epähomogeeninen DY

Epähomogeeninen, vakiokertoiminen DY

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

voidaan ratkaista seuraavasti:

- Etsitään kaikki homogeenisen DY:n ratkaisut $y_1, \dots, y_n$ yritteellä $y = e^{\lambda t}$.
- Etsitään epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu y_0 yritteellä kokeilemalla tai Laplace-muunnosten avulla.
- Kaikki ratkaisut ovat tällöin muotoa $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_0$.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

- Jos $b(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $b(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos b on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos b on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön

$$y' + a(x)y = 0$$

ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H .
- Vakion variointi: Sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen DY:hyn ja ratkaistaan $C(x)$.

Esimerkki

$$y' + 2xy = x$$

Homogenisointi:

$$y' + 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |y| = -2x$$

$$\Leftrightarrow \ln |y| = -x^2 + B$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^B e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^B e^{-x^2}$$

riippuen y :n merkistä. Huomioidaan merkki ratkaisussa $y = Ce^{-x^2}$.

Vakion variointi

Alkuperäinen yhtälö $y' + 2xy = x$, homogeenisen ratkaisu $y = Ce^{-x^2}$.

Yrite: $y = C(x)e^{-x^2}$. Tällöin $y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x)$ ja sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = x \Leftrightarrow C'(x)e^{-x^2} = x.$$

Tästä

$$C'(x) = xe^{x^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

ja

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.

Sarjaratkaisu

Jos $a(x)$ ja $b(x)$ ovat riittävän säännöllisiä, voidaan DY:n

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

ratkaisu löytää Taylorin kehitelmän

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

avulla.

Esimerkki

Esimerkki 127 (vuoden 2019 moniste): Airyn DY $y'' + xy = 0$

Määritelmä

Muotoa

$$y' = g(x)f(y)$$

oleva DY on separoituva.

Separoituvan DY:n ratkaiseminen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(y)} dy = g(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x) dx + C$$

Esimerkit 116–118 (2019 moniste)

Esimerkki 118:

$$\begin{aligned}ma &= mg - kv^2 \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= g - \frac{k}{m}v^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv &= dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv &= \int dt + C\end{aligned}$$

Esimerkki

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{C}{y(x)} dx.$$

Derivoimalla saadaan

$$y' = \frac{C}{y},$$

siis

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C}{y} \Leftrightarrow y \, dy = C \Leftrightarrow \int y \, dy = \int C \, dt.$$

Näin ollen $\frac{1}{2}y^2 = Ct + k$ ja siis

$$y = \sqrt{2Ct + 2k}.$$

Alkuehdosta $y_0 = \sqrt{2k}$ saadaan $k = \frac{y_0^2}{2}$.

Yleistetty ketjusääntö

Jos y ja z ovat x :n funktioita, on

$$\frac{d}{dx}F(y, z) = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Esimerkki

Olkoon $y = \sin x$ ja $z = x^2 + e^x$ sekä $F(y, z) = yz^2 + 3yz$.
Lasketaan $\frac{d}{dx}F(y, z)$.

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

Esimerkki

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

Ratkaisuyrite

Muotoa

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

oleva DY:tä voidaan yrittää tulkita muodossa

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x, y) = 0,$$

jonka ratkaisu on

$$F(x, y) = C.$$

Lause

Jos funktiot f ja g ovat riittävän säännöllisiä, funktio $F(x, y)$, jolle $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

on eksakti, jos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ (ja f ja g ovat riittävän säännöllisiä).

Eksaktin DY:n ratkaiseminen

$$\begin{aligned} f(x, y) + g(x, y)y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow F(x, y) &= C \end{aligned}$$

Huomautus

Jos yhtälö

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

ei ole eksakti, on toisinaan mahdollista löytää funktio $\mu(x, y)$ (ns. integroiva tekijä), jolla kerrottuna yhtälö

$$f(x, y)\mu(x, y) + g(x, y)\mu(x, y)y' = 0$$

on eksakti.

Mallintamistehtävä

Etsittävä yhtälö sellaiselle käyrälle, joka heijastaa x -akselin suuntaiset säteet origoon.

