

Insinöörimatematiikka 4

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Jatkuva

Lineaarinen DY:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Jatkuva

Lineaarinen DY:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Laplace-muunnos:

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \dots + a_0Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \dots + b_0X,$$

Jatkuva

Lineaarinen DY:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Laplace-muunnos:

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \dots + a_0Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \dots + b_0X,$$

josta

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)Y = (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)X$$

Jatkuva

Lineaarinen DY:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Laplace-muunnos:

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \dots + a_0Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \dots + b_0X,$$

josta

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)Y = (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)X$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}}_{G(s) \text{ (ns. siirtofunktio)}} X(s)$$

Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

Lause

Lineaarinen systeemi on stabiili tarkalleen silloin kun sen siirtofunktion napojen reaaliosat ovat negatiivisia.

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}[x_D(t)](s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \mathcal{L}[\delta(t - nT)](s)$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \end{aligned}$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \end{aligned}$$

missä on merkitty $z = e^{sT}$ ja $x_n = x(nT)$

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \dots$ Z -muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \dots$ Z -muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z -muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ ($n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) Z -muunnos kun T on kiinnitetty.

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) &= z\mathcal{Z}[f_n] - f_0z \\ \mathcal{Z}[f_{n+2}](z) &= z^2\mathcal{Z}[f_n] - f_1z - f_0z^2,\end{aligned}$$

jne.

Differenssi

Määritellään $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, jolloin

$$\Delta^2 y_n = y_{n-2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

Differenssi

Määritellään $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, jolloin

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

ja

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= y_{n+3} - 2y_{n+2} + y_{n+1} - (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) \\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n\end{aligned}$$

Lineaarinen DY vs. differenssiyhtälö

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Lineaarinen DY vs. differenssiyhtälö

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Tätä vastaa periaatteessa differenssiyhtälö

$$\Delta^k y_n + \alpha_{k-1} \Delta^{k-1} y_n + \dots + \alpha_0 y_n = \Delta^l x_n + \beta_{l-1} \Delta^{l-1} x_n + \dots + \beta_0 x_n.$$

Lineaarinen DY vs. differenssiyhtälö

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

Tätä vastaa periaatteessa differenssiyhtälö

$$\Delta^k y_n + \alpha_{k-1} \Delta^{k-1} y_n + \dots + \alpha_0 y_n = \Delta^l x_n + \beta_{l-1} \Delta^{l-1} x_n + \dots + \beta_0 x_n.$$

mutta tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n = x_{n+l} + b_{l-1}x_{n+l-1} + \dots + b_0x_0$$

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n = x_{n+l} + b_{l-1}x_{n+l-1} + \dots + b_0x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän.

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n = x_{n+l} + b_{l-1}x_{n+l-1} + \dots + b_0x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän. $\mathcal{Z}$ -muunnoksilla saadaan

$$z^k Y + a_{k-1}z^{k-1}Y + \dots + a_0Y = z^l X + b_{l-1}z^{l-1}X + \dots + b_0X,$$

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n = x_{n+l} + b_{l-1}x_{n+l-1} + \dots + b_0x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän. $\mathcal{Z}$ -muunnoksilla saadaan

$$z^k Y + a_{k-1}z^{k-1}Y + \dots + a_0Y = z^l X + b_{l-1}z^{l-1}X + \dots + b_0X,$$

josta

$$Y = \frac{z^l + b_{l-1}z^{l-1} + \dots + b_0}{\underbrace{z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_0}_{G(z) \text{ ns. siirtofunktio}}} X$$

Stabiilisuusehto

Alkuperäiselle (jatkuvalle) systeemille stabiilisuusehto on $\operatorname{Re} s < 0$ aina, kun s on siirtofunktion napa.

Stabiilisuusehto

Alkuperäiselle (jatkuvalle) systeemille stabiilisuusehto on $\operatorname{Re} s < 0$ aina, kun s on siirtofunktion napa. Kirjoittamalla $s = a + ib$ saadaan

$$z = e^{sT} = e^{aT} e^{ibT},$$

Stabiilisuusehto

Alkuperäiselle (jatkuvalle) systeemille stabiilisuusehto on $\operatorname{Re} s < 0$ aina, kun s on siirtofunktion napa. Kirjoittamalla $s = a + ib$ saadaan

$$z = e^{sT} = e^{aT} e^{ibT},$$

jolloin ehto $a < 0$ on yhtäpitävä ehdon $|z| < 1$ kanssa.

Esimerkki: Fibonaccin luvut

Olkoot $F_0 = F_1 = 1$ ja

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

Olkoot $F_0 = F_1 = 1$ ja

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

josta Z -muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä

$\mathcal{Z}[F_n](z) = \hat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2 \hat{F}_n(z) - z - z^2 = z \hat{F}_n(z) - z + \hat{F}_n(z),$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

Olkoot $F_0 = F_1 = 1$ ja

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

josta Z -muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä

$\mathcal{Z}[F_n](z) = \hat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2 \hat{F}_n(z) - z - z^2 = z \hat{F}_n(z) - z + \hat{F}_n(z),$$

josta

$$(z^2 - z - 1) \hat{F}_n(z) = z^2$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

Olkoot $F_0 = F_1 = 1$ ja

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

josta Z -muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä

$\mathcal{Z}[F_n](z) = \hat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2 \hat{F}_n(z) - z - z^2 = z \hat{F}_n(z) - z + \hat{F}_n(z),$$

josta

$$(z^2 - z - 1) \hat{F}_n(z) = z^2$$

ja

$$\hat{F}_n(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}}$$

Esimerkki

Osamurtohajotelmilla (merk. $u = \frac{1}{z}$) saadaan

$$\begin{aligned}\hat{F}_n(z) &= \frac{1}{1 - u - u^2} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{u - \alpha} - \frac{1}{u - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\frac{1}{z} - \alpha} - \frac{1}{\frac{1}{z} - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{z}{1 - \alpha z} - \frac{z}{1 - \beta z} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\alpha^{-1} \frac{z}{\alpha^{-1} - z} - \beta^{-1} \frac{z}{\beta^{-1} - z} \right),\end{aligned}$$

missä $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ja $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Käänteinen Z -muunnos

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\beta - \alpha} (\alpha^{-1} \alpha^{-n} + \beta^{-1} \beta^{-n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ esittää kolmiulotteisen avaruuden skalaarisuuretta

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ esittää kolmiulotteisen avaruuden skalaarisuuretta
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ esittää kolmiulotteisen avaruuden vektorisuuretta (vektorikenttä)

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ja $D_{x_i}f(\mathbf{a})$. Jos muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\mathbf{a})$ käytetään.

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ja $D_{x_i}f(\mathbf{a})$. Jos muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\mathbf{a})$ käytetään.

Lause

Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Määritelmä

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

jos

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) < \epsilon)$$

Määritelmä

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

jos

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) < \epsilon)$$

Huomautus

Tässä yhteydessä

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Derivoituvuus

Reaalifunktion f derivoituvuus:

Derivoituvuus

Reaalifunktion f derivoituvuus:

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \epsilon(0) = 0$.

Derivoituvuus

Reaalifunktion f derivoituvuus:

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = 0$.