

Insinöörimatematiikka 4

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Usean muuttujan differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ esittää kolmiulotteisen avaruuden skalaarisuuretta
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ esittää kolmiulotteisen avaruuden vektorisuuretta (vektorikenttä)

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ja $D_{x_i}f(\mathbf{a})$. Jos muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\mathbf{a})$ käytetään.

Huomautus:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Lause

Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Määritelmä

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

jos

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) < \epsilon)$$

Huomautus

Tässä yhteydessä

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Huomautus

Jos $f = (f_1, \dots, f_m)$ on jatkuva pisteessä x , niin myös kaikki koordinaattifunktiot ovat. Myös käänteinen väite on tosi.

Derivoituvuus

Reaalifunktion f derivoituvuus:

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = 0$.

Määritelmä

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän mukaista lineaarikuvausta T sanotaan funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$ ja merkitään $Df(\mathbf{x})$. Lineaarikuvauksen $Df(\mathbf{x})$ matriisia sanotaan Jacobin matriisiksi ja siitä käytetään merkintää $J_f(\mathbf{x})$.

Huomautus:

Jos valitaan erityisesti $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_j$, saadaan

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}) &= T h \mathbf{e}_j + \|h\mathbf{e}_j\| \epsilon(h\mathbf{e}_j) \\ \Leftrightarrow f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}) &= h T \mathbf{e}_j + |h| \epsilon(h\mathbf{e}_j) \\ \Leftrightarrow \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} &= T \mathbf{e}_j + \frac{|h|}{h} \epsilon(h\mathbf{e}_j), \end{aligned}$$

josta seuraa

Lause

$$J_f(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

Huomautus:

Jos $f = (f_1, \dots, f_m)$ on differentioituva jossain pisteessä, ovat kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ myös olemassa. Käänteinen tulos ei välttämättä pidä paikkansa.

Erikoistapaus

Lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on muotoa

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Määritelmä

Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \times n$) Jacobin matriisia sanotaan *gradientiksi* ja merkitään $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ on

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Tangenttitaso

Funktioille $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus saa muodon

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (a \ b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by.$$

Tällöin siis differentioituvuus pisteessä $\mathbf{x}_0$ funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = ah + bk + \epsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|,$$

missä on merkitty $\mathbf{h} = (h, k)$. Jos edelleen merkitään $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, on

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \epsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

missä $\epsilon(h, k) \rightarrow (0, 0)$ kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Tangenttitaso

Toisin sanoen

$$z - z_0 \approx ah + bk.$$

Kun merkitään $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$, voidaan ylläoleva approksimaatio kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 \approx a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Tasoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

sanotaan pinnan $z = f(x, y)$ *tangenttitasoksi* pisteessä (x_0, y_0) .

Kokonaisdifferentiaali

- Merkitään $\mathbf{dx} = (dx_1, \dots, dx_n)$
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$
- Muutoksen $f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x})$ lineaarista approksimaatiota

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

sanotaan kokonaisdifferentiaaliksi.

Esimerkki

Esimerkki 134 (vuoden 2015 moniste)

Suunnattu derivaatta

Olkoon $\|\mathbf{u}\| = 1$. Tällöin

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

Cauchy-Schwarz

$$|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| = |\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x})\|.$$

Johtopäätös

Differentioituva funktio muuttuu jyrkimmin gradientin osoittamassa suunnassa. $\nabla f(x, y, z)$ on kohtisuorassa pintaa $f(x, y, z) = 0$ vastaan