

Insinöörimatematiikka 4

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Suunnattu derivaatta

Olkoon $\|\mathbf{u}\| = 1$. Tällöin

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

Huomautus

Jos $\mathbf{u} = \mathbf{e}_j$, on

$$D_{\mathbf{e}_j}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Kaikille sisätuloille pätee

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

jossa yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin kun $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat lineaarisesti riippuvia, siis $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$.

Seuraus

Erityisesti pistetulolle pätee

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

jossa on yhtäsuuruus tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$.

Seuraus

$$|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| = |\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$$

ja yhtäsuuruus pätee tarkalleen silloin kun $\mathbf{u} = c\nabla f(\mathbf{x})$.

Johtopäätös

Differentioituva funktio muuttuu jyrkimmin gradientin osoittamassa suunnassa.

Johtopäätös

$\nabla f(x, y, x)$ on kohtisuorassa pintaa $f(x, y, z) = 0$ vastaan

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$\begin{aligned} & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) \\ = & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & g(f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})\mathbf{h}) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x})\mathbf{h} \end{aligned}$$

Ketjusääntö

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x})$$

Jacobin matriiseille:

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x}))J_f(\mathbf{x})$$

Esimerkki

Funktiolle $z(x, y)$ on

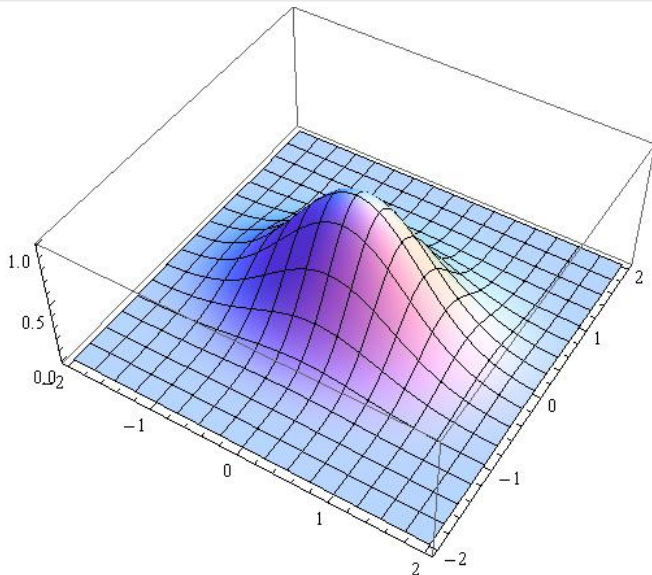
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Esimerkki

Esimerkki 136

Ääriarvot

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ääriarvopisteissä $\mathbf{a}$ on $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.



Lause (Lagrangen kertoimet)

Jos funktioiden $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ja piste $\mathbf{a}$ on funktion f ääriarvo joukossa $\{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ ja $\mathbf{a}$ on g :n säännöllinen piste (Jacobin matriisi täysiasteinen), niin tällöin on olemassa vakiot $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ joille pätee

$$\nabla(f(\mathbf{a}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{a})) = \mathbf{0}.$$

Esimerkki

Esimerkki 142

Lähtökohta: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ väli: $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n]$.
- Geometrinen mitta $\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.
- Välin $[a_i, b_i]$ jako $D_i \rightarrow$ välin I jako $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$
($k = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$) kpl.
- Merkintä: $m_i = \inf_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x})$, $M_i = \sup_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x})$.
- Alasumma $\underline{S}_D = \sum_{i=1}^k m_i \mu(I_i)$
- Yläsumma $\overline{S}_D = \sum_{i=1}^k M_i \mu(I_i)$.

Määritelmä

- Suorakulmaisille alueille (väleille) I integraali $\int_I f$ määritellään edellä kuvailtujen ylä- ja alasummien yhteisenä raja-arvona.
- Ei-suorakulmaisille alueille A määritellään

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{jos } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

sekä valitsemalla jokin joukon A sisältävä suorakulmainen alue (väli) I ja määrittelemällä

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

Fubinin lause

Olkoon $I = I_1 \times I_2$. Tällöin riittävän säännöllisyysoletuksin

$$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

Erikoistapaus

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$, jolloin

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{I_2} f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Esimerkkejä

Esimerkit 147–150