

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 1, 27.9.2022

1. Olkoon $f(x) = 3x + 2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Miten $d(f(x), f(2))$ ja $d(x, 2)$ suhtautuvat toisiinsa?
2. Olkoon $f(x) = 3x^2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Jos vielä rajoitetaan muuttujaa x siten, että $x \in (1, 3)$, miten $d(f(x), f(2))$ ja $d(x, 2)$ suhtautuvat toisiinsa?
3. Jos edellisen tehtävän rajoitetta $x \in (1, 3)$ tiukennetaan muotoon $x \in (1.9, 2.1)$, miten etäisyydet $d(f(x), f(2))$ ja $d(x, 2)$ sitten suhtautuvat toisiinsa?
4. Jos x on lähellä lukua 3, on $\frac{1}{x}$ ilmeisesti lähellä lukua $\frac{1}{3}$. Esitä etäisyydelle $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{3})$ lauseke, jossa esiintyy myös $d(x, 3)$. Ohje: Määritelmät ja laventaminen.
5. Osoita, että $x^3 - 5x^2 + 1$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta annettu luku $M > 0$, kunhan x valitaan riittävän suureksi.
Vihje: Kunhan $x > 1$, on $x^3 - 5x^2 + 1 > x^3(1 - \frac{5}{x})$ (miksi?). Tämän jälkeen voidaan todeta, että $1 - \frac{5}{x} \geq \frac{1}{2}$ kunhan x on riittävän suuri (kuinka suuri?) Miten saadaan lopullinen johtopäätös?
6. Selvitä miten $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ käyttäytyy kun $x \rightarrow 1$. Onko mahdollisesti raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

olemassa?

7. Laske $d(\frac{x^2-3x+2}{x-1}, -1)$ ja mieti millä tavoin x pitää valita, jotta tämä saataisiin pieneksi.
8. Miten funktio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ käyttäytyy, kun $x \rightarrow 0$? Onko olemassa raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$?
9. Miten funktio $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ käyttäytyy, kun $x \rightarrow 0$? Onko olemassa raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$?