

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 1, 27.9.2022

1. Olkoon $f(x) = 3x + 2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Miten $d(f(x), f(2))$ ja $d(x, 2)$ suhtautuvat toisiinsa?

Mallivastaus: $f(2) = 8$ ja siis

$$d(f(x), f(2)) = |3x + 2 - 8| = |3x - 6| = 3|x - 2| = 3d(x, 2).$$

$d(f(x), f(2))$ on siis kolminkertainen verrattuna etäisyyteen $d(x, 2)$.

2. Olkoon $f(x) = 3x^2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(2))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 2)$. Jos vielä rajoitetaan muuttujaa x siten, että $x \in (1, 3)$, miten $d(f(x), f(2))$ ja $d(x, 2)$ suhtautuvat toisiinsa?

Mallivastaus: Koska $f(2) = 12$, on

$$d(f(x), f(2)) = |3x^2 - 12| = 3|x^2 - 4| = 3|(x+2)(x-2)| = 3(x+2)d(x, 2).$$

Koska $|x+2| \leq |x| + 2 < 3 + 2 = 5$, voidaan todeta että etäisyys $d(f(x), f(2))$ on korkeintaan $3 \cdot 5 = 15$ -kertainen etäisyyteen $d(x, 2)$ verrattuna. Erityisesti aiempi etäisyys tulee pieneksi, mikäli jälkimmäinen tulee.

3. Jos edellisen tehtävän rajoitetta $x \in (1, 3)$ tiukennetaan muotoon $x \in (1.9, 2.1)$, miten etäisyydet $d(f(x), f(2))$ ja $d(x, 2)$ sitten suhtautuvat toisiinsa?

Huomautus: Mallivastauksissa käytetään selkeyden vuoksi desimaalipistettä desimaalipilkun sijaan.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(2)) &= |3x^2 - 12| = 3|x^2 - 4| = 3|(x+2)(x-2)| \\ &= 3(x+2)d(x, 2) \leq 3(2.1+2)d(x, 2) = 12.3d(x, 2) \end{aligned}$$

Tällöin voidaan sanoa, että etäisyys $d(f(x), f(2))$ on korkeintaan 12.3-kertainen etäisyyteen $d(x, 2)$ verrattuna.

Mietittävää: Voisiko kerrointa 12.3 tarkentaa jos väliä $(1.9, 2.1)$ tiukennettaisiin muotoon $(1.99, 2.01)$?

4. Jos x on lähellä lukua 3, on $\frac{1}{x}$ ilmeisesti lähellä lukua $\frac{1}{3}$. Esitä etäisyydelle $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{3})$ lauseke, jossa esiintyy myös $d(x, 3)$. Ohje: Määritelmät ja laventaminen.

Mallivastaus:

$$d(\frac{1}{x}, \frac{1}{3}) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3}{3x} - \frac{x}{3x} \right| = \left| \frac{1}{3x} \right| |3 - x| = \frac{1}{3|x|} d(x, 3).$$

Huomautus: Jos valitaan x niin läheltä lukua 3, että $x > 2$, on

$$d(\frac{1}{x}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3|x|} d(x, 3) < \frac{1}{3 \cdot 2} d(x, 3) = \frac{1}{6} d(x, 3).$$

Jos taas on valittu x siten, että $x > 2.9$, on

$$d(\frac{1}{x}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3|x|} d(x, 3) < \frac{1}{3 \cdot 2.9} d(x, 3) = \frac{1}{8.7} d(x, 3).$$

Mieti voisiko kerrointa $\frac{1}{8.7}$ vielä pienentää kiristämällä luvun x valintaa lähemmäksi lukua 3?

5. Osoita, että $x^3 - 5x^2 + 1$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta annettu luku $M > 0$, kunhan x valitaan riittävän suureksi.

Vihje: Kunhan $x > 1$, on $x^3 - 5x^2 + 1 > x^3(1 - \frac{5}{x})$ (miksi?). Tämän jälkeen voidaan todeta, että $1 - \frac{5}{x} \geq \frac{1}{2}$ kunhan x on riittävän suuri (kuinka suuri?) Miten saadaan lopullinen johtopäätös?

Mallivastaus: $x^3 - 5x^2 + 1 > x^3 - 5x^2 = x^3(1 - \frac{5}{x})$. Jos taas $x > 10$, on $\frac{5}{x} < \frac{1}{2}$ ja täten $1 - \frac{5}{x} > \frac{1}{2}$. Jos siis $x > 10$, on $x^3 - 5x^2 + 1 > \frac{1}{2}x^3$. Edelleen voidaan todeta, että $\frac{1}{2}x^3 > M$, kunhan $x > \sqrt[3]{2M}$. Näin ollen $x^3 - 5x^2 + 1 > M$, kunhan $x > \max\{10, \sqrt[3]{2M}\}$.

Selostusta: On melko hankalaa selvittää suoraan mille x :n arvoille pätee $x^3 - 5x^2 + 1 > M$. Tätä ongelmaa voidaan kiertää etsimällä polynomille $x^3 - 5x^2 + 1$ jokin alaraja (tässä tapauksessa $\frac{1}{2}x^3$), jota voidaan verrata lukuun M helpommin. Mallivastaus on muodollinen todistus raja-arvolle

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 5x^2 + 1) = \infty.$$

6. Selvitä miten $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ käyttäytyy kun $x \rightarrow 1$. Onko mahdollisesti raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

olemassa?

Mallivastaus: Laskemalla funktion arvoja lähellä lukua 1, esim. pisteissä $x = 0.9, 0.99, 1.1, 1.01$ jne. voi tulla vakuuttuneeksi siitä että funktion f arvot tulevat lähelle lukua -1 , kun x valitaan läheltä lukua 1.

Tarkemmin: Koska $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, on $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} -1$.

7. Laske $d(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, -1)$ ja mieti millä tavoin x pitää valita, jotta tämä saataisiin pieneksi.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} d(f(x), -1) &= \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} - (-1) \right| = \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} \right| \\ &= \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right| = \left| \frac{(x - 1)^2}{x - 1} \right| = |x - 1| = d(x, 1). \end{aligned}$$

Jos valitaan x niin läheltä lukua 1, että $d(x, 1) < \epsilon$, on myös

$$d(f(x), -1) = d(x, 1) < \epsilon.$$

8. Miten funktio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ käyttäytyy, kun $x \rightarrow 0$? Onko olemassa raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$?

Mallivastaus: Voidaan todeta, että $\sin \frac{1}{x} = 1$ kun $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ ja $\sin \frac{1}{x} = -1$ kun $\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Koska mielivaltaisen läheltä nollaa löytyy pisteitä joissa $f(x)$ saa arvon 1 ja -1 , ei funktion arvo voi tulla lähelle mitään yksittäistä lukua kun $x \rightarrow 0$.

Näin ollen kysyttyä raja-arvoa ei ole olemassa.

9. Miten funktio $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ käyttäytyy, kun $x \rightarrow 0$? Onko olemassa raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$?

Mallivastaus: Kysytty raja-arvo on 0, sillä

$$d(f(x), 0) = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = d(x, 0).$$

Näin ollen $d(f(x), 0) < \epsilon$, kunhan $d(x, 0) < \epsilon$ (Tässä tapauksessa siis $\delta_\epsilon = \epsilon$).