

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 2, 4.10.2022

1. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = 2 \sin x \cos x$.

Mallivastaus: Tulon derivointisäännön perusteella

$$f'(x) = 2 \cos x \cos x + 2 \sin x (-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Huomautus: Koska $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, saadaan myös muoto $f'(x) = 2 \cos 2x$. Tämä on sama kuin edellä saatu muoto, sillä $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

2. Määritä funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta suoraan derivaatan määritelmään nojautuen. Ohje: Etsi sopiva laventaja erotusosamäärän lausekkeelle.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Huomautus: $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$ seuraa siitä, että $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ on alkeisfunktiona jatkuva. Sama koskee myös rationaalilauseketta, jossa $\sqrt{x+h}$ esiintyy osana. On myös huomattava, että derivaatan määrittävää raja-arvoa ei ole olemassa, jos $x = 0$. Näin ollen funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on derivoituva vain jos $x > 0$.

3. Olkoon $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Etsi $f'(x)$ kun $x \neq 0$.

Mallivastaus: Tulon, sinin, ja yhdistetyn funktion derivointisäännön perusteella

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

4. Olkoon f kuten edellisessä tehtävässä. Onko $f'(0)$ olemassa?

Mallivastaus: Derivaatan $f'(0)$ olemassaolon selvittämiseksi on tarkasteltava erotusosamäärää $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$. Ensimmäinen ongelma on tietysti se, että lauseke ei määrittele funktiolle f mitään arvoa, kun $x = 0$. Edellisen demokierroksen perusteella tiedetään kuitenkin, että $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, joten määrittelemällä $f(0) = 0$ saadaan koko reaaliakselilla jatkuva funktio. Käytetään tätä määritelmää (miksi kannattaa toimia näin?). Tällöin

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Kun $h \rightarrow 0$, voidaan edellisen demokierroksen perusteella todeta, että raja-arvoa ei ole olemassa, joten siis derivaattaa $f'(0)$ ei ole olemassa.

Huomautus: Luennolla esitetyn lauseen mukaan funktio on jatkuva niissä pisteissä missä se on derivoituva. Jos siis funktio f ei ole jatkuva pisteessä

$x = 0$, ei se myöskään voi olla derivoituva. Täten ainoa mahdollisuus saada aikaan pisteessä $x = 0$ derivoituva funktio on määritellä $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Tämäkään ei aina tuota derivoituvuutta, kuten tässä tehtävässä kävi ilmi.

5. Selvitä funktion $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ derivaattafunktio käyttämällä osamäärän derivointisääntöä. Vastaus: $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, mutta miten?

Mallivastaus: Osamäärän derivointisäännön perusteella

$$D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Toisaalta

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

6. Käytetään funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ käänteisfunktioista merkitään $\arctan$. Sovella yhtälöön

$$\arctan(\tan x) = x$$

ketjusääntöä, merkitse $y = \tan x$ ja päätele mitä on $D \arctan y$.

Mallivastaus: Ketjusäännön perusteella

$$D \arctan(\tan x) D \tan x = 1,$$

mikä voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$D \arctan(\tan x)(1 + \tan^2 x) = 1,$$

mistä merkitsemällä $y = \tan x$ ja jakamisella seuraa

$$D \arctan(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Näin ollen siis arkustangentin derivointisääntö saa (vaihtamalla y x :ksi) muodon

$$D \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

7. Olkoon $a > 0$ ja merkitään $C = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$. Osoita suoraan derivaatan määritelmään perustuen, että

$$\frac{d}{dx} a^x = C \cdot a^x.$$

Ohje: Käytä erotusosamäärää.

Mallivastaus:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a^x \cdot C.$$

Huomautus: Jos oletetaan tunnetuksi, että eksponenttifunktio $x \rightarrow a^x$ on jatkuva funktio, on tietysti $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = a^0 = 1$. Tällöin lausekkeen $\frac{a^h - 1}{h}$ raja-arvo kun $h \rightarrow 0$ on hankalasti määritettävissä, koska sekä osoittaja että nimittäjä lähestyvät nollaa. Itse asiassa on melko työlästä osoittaa että kyseinen raja-arvo ylipäänsä on olemassa, työläys toki riippuu siitä miten eksponenttifunktio muodollisesti määritellään.

Kaikilla mielekkäillä eksponenttifunktion määritelmillä voidaan kuitenkin päätyä siihen johtopäätökseen, että kun $a > 0$, on raja-arvo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ olemassa. $a = e = 2,71828 \dots$ on ainoa luku jolle kyseinen raja-arvo on 1.

8. Yhtälö

$$x^2 + 5xy - 6xy^2 + 2y^3 = 16$$

määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (1, 3)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Totea että piste $(1, 3)$ kuuluu käyrälle ja määritä $f'(1)$.

Mallivastaus: Implisiittinen derivointi tuottaa yhtälön

$$2x + 5y + 5xy' - 6y^2 - 6x2yy' + 2 \cdot 3y^2y' = 0,$$

josta saadaan

$$(5x - 12xy + 6y^2)y' = -(2x + 5y - 6y^2)$$

ja edelleen

$$y' = -\frac{2x + 5y - 6y^2}{5x - 12xy + 6y^2}$$

Sijoittamalla tähän $(x, y) = (1, 3)$ saadaan

$$y'(1) = \frac{37}{23}.$$

9. Parametrimuoto $\{(2t^3 - 3t + 5, t^2 + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (4, 3)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Määritä $f'(4)$.

Mallivastaus: Ensiksi pitää selvittää parametrin t arvo, jolla piste $(4, 3)$ saavutetaan. Tätä varten ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4 &= 2t^3 - 3t + 5 \\ 3 &= t^2 + 2. \end{cases}$$

Jälkimmäisen yhtälön ratkaisut ovat $t = \pm 1$, mutta vain $t = 1$ toteuttaa ensimmäisen yhtälön. Täten $t = 1$ on kysytty parametrin arvo, jolla piste $(4, 3)$ saavutetaan.

Derivaatta voidaan määrittää seuraavasti

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{6t^2 - 3},$$

ja $f'(4)$ saadaan sijoittamalla tähän $t = 1$, $f'(4) = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 1 - 3} = \frac{2}{3}$.