

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 3, 11.10.2022

1. Olkoon $f(x) = x^3 + x + 1$. Perustele miksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio. Määritä $Df^{-1}(-2)$. Ohje: Käytä käänteisfunktion derivointisääntöä. On selvittävä sellainen x , jolla $f(x) = -2$ (miksi?) Kokeile joitain lukuarvoja tämän yhtälön ratkaisemiseksi.

Mallivastaus: Ensinnäkin $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, joten f on aidosti kasvava ja siksi injektio. Toiseksi, On mahdollista todeta että $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, joten f saa miten tahansa suuria arvoja sekä $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, joten f saa miten tahansa pieniä arvoja. Jatkuvana funktiona f saavuttaa täten minkä tahansa reaaliarvon ja näin ollen f on myös surjektio.

Käänteisfunktion derivointisäännön perusteella

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2 + 1},$$

joten derivaatan $(f^{-1})'(-2)$ selvittämiseksi on määritettävä sellainen x :n arvo, jolle $f(x) = -2$. Tämä selviää ratkaisemalla yhtälö $x^3 + x + 1 = -2 \Leftrightarrow x^3 + x + 3 = 0$. Tälle yhtälölle ei löydy helposti ratkaisua, mutta $x = -1$ on ilmeisesti hyvä likiarvo ja Newtonin menetelmällä (vrt. viimeinen tehtävä) löytyy ratkaisun likiarvo $x = -1.21341 \dots$. Tällöin

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{3 \cdot (-1.21341 \dots)^2 + 1} = 0.18460 \dots$$

2. Määritä $\int x \cos x \, dx$. Ohje: Osittaisintegrointi.

Mallivastaus:

$$\int x \cos x \, dx = \int x \frac{d}{dx} \sin x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

3. Määritä $\int x \ln x \, dx$. Ohje: Osittaisintegrointi.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int \frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} \ln x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

4. Määritä $\int \sin^2 x \, dx$. Ohje: Käytä sopivaa trigonometrista kaavaa jos et parempaa keinoa keksi.

Mallivastaus: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, joten

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Huomautus 1: Edellä piti määrittää $\int \cos 2x \, dx$. Tarkastellaan tämän sijasta yleisempää tilannetta $\int f(cx) \, dx$, kun tiedetään että $F'(x) = f(x)$. Tällöin on mahdollista tehdä sijoitus $x = \frac{t}{c}$, jolloin $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}$ ja

$$\int f(cx) \, dx = \int f(t) \frac{1}{c} \, dt = \frac{1}{c} F(t) + C = \frac{1}{c} F(cx) + C.$$

Koska

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

saadaan edellämainitun erikoistapauksena

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Huomautus 2: Antiderivaattaa voidaan etsiä myös osittaisintegroimalla:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \frac{d}{dx}(-\cos x) \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx.$$

Toisaalta

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx = x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Täten siis

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx,$$

josta

$$2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x + C$$

ja edelleen

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{C}{2}.$$

Mieti miksi vakio C piti tuoda esille viimeistä edellisessä vaiheessa ja miksi lopputulos näyttää erilaiselta kuin aiemmalla tavalla saatuna. Vihje: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

5. Määritä $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$ käyttämällä sijoitusta $x = \cos t$.

Mallivastaus: Jos $x = \cos t$, on $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, ja täten

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-\cos^2 t} (-\sin t) \, dt \\ &= \int \sqrt{\sin^2 t} (-\sin t) \, dt = - \int |\sin t| \sin t \, dt \\ &= - \int \sin^2 t \, dt. \end{aligned}$$

(oletetaan toistaiseksi, että $\sin t \geq 0$). Tällöin

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{1-\cos^2 t} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Huomautus 1: Kesken laskun tehtiin perustelematon oletus $\sin t \geq 0$. Mieti miten tulos muuttuisi, jos olisi otaksuttu $\sin t < 0$?

Huomautus 2: Perustelematon oletus on mahdollista välttää käyttämällä koko laskun ajan lauseketta $|\sin t| \sin t$, mutta tällöin lasku muodostuu työläemmäksi.

Huomautus 3: Arkuskosini voidaan korvata arkussinillä: Mieti miksi $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ on tosi.

6. Määritä $\int \tan x \, dx$. Ohje: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Mieti miten osoittaja saadaan nimitäjästä differentiaalilaskennan keinoin.

Mallivastaus: Koska $D \cos x = -\sin x$, saadaan logaritmin derivointisääntöä oikealta vasemmalle lukemalla

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

7. Määritä $\int \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} \, dx$. Ohje: Etsi aluksi sellaiset luvut A ja B että

$$\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

Käytä tämän jälkeen luennolla mainittuja sääntöjä antiderivaatan löytämiseksi.

Mallivastaus:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)}.$$

Näin ollen saadaan yhtälöpari $A+B=3$, $3A-2B=-1$. Tämän ratkaisut ovat $A=1$, $B=2$. Täten

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} \, dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} \right) = \ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C \\ &= \ln|x-2||x+3|^2 + C. \end{aligned}$$

8. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4}$. Ohje: L'Hospitalin sääntö.

Mallivastaus: L'Hospitalin sääntöä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x^2)2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x^2)}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x^2)2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x^2)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. Etsi differentiaaliyhtälölle $y' = 3y$ ratkaisu, jolle $y(0) = 1$.

Vastaus: Differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{y'}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln|y| = 3,$$

mistä saadaan $\ln|y| = 3x + C$ ja edelleen $|y| = e^C e^{3x}$. Täten joko $y = e^C e^{3x}$ tai $y = -e^C e^{3x}$, mutta koska eksponenttifunktion arvot ovat aina positiivisia ja $y(0) = 1 > 0$, on oltava $y = e^C e^{3x}$. Vakio C kiinnittyy alkuehdosta: $1 = y(0) = e^C e^0 = e^C$, joten kysytty ratkaisu on $y = e^{3x}$.

10. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^3 + x + 1 = 0$ likimääräisen ratkaisun löytämiseksi sellaisella tarkkudella, jossa vaikuttaa olevan 8 desimaalia oikein. Ohje: Valitse alkuarvo siten, että se vaikuttaisi olevan lähellä nollakohtaa.

Vastaus: Merkitään $f(x) = x^3 + x + 1$ ja todetaan, että $f(0) = 1$, $f(-1) = -1$, joten funktiolla f on nollakohta välillä $1, -1$. Newtonin menetelmässä iteroidaan funktiota $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3+x+1}{3x^2+1}$, ja jos valitaan $x_0 = 0$, on $x_1 = g(x_0) = -1$, $x_2 = g(x_1) = -0.75$, $x_3 = g(x_2) = -0.68604651162791\dots$, $x_4 = g(x_3) = -0.68233958259731\dots$, $x_5 = g(x_4) = -0.68232780394651\dots$, $x_6 = g(x_5) = -0.68232780382802\dots$, $x_7 = g(x_6) = -0.68232780382802\dots$

Näyttää siis siltä, että 8 desimaalia on oikein jo likiarvossa x_5 , siis neljännen iteraatiokierroksen jälkeen.