

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 4, 18.10.2022

1. Etsi funktiolle $f(x) = \sin x$ kertalukua 4 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$.
2. Funktiolla $\frac{1}{1-x}$ on pisteessä $x = 0$ tunnettu Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$$

Onko siis seuraava oikein kun $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} + \frac{x^3}{125} + O(x^4)\right)?$$

Entä onko seuraava oikein kun $x \rightarrow 4$:

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{1-(x-4)} = 1 - (x-4) + (x-4)^2 - (x-4)^3 + O((x-4)^4)?$$

Kumpi näistä on oikea Taylorin kehitelmä funktiolle $f(x) = \frac{1}{5-x}$?

3. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}$ astetta 6 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ohje: Kts. Demo 3, tehtävä 7 ja sovelta tämän jälkeen tehtävän 2 ideaa.
4. Etsi funktiolle $(\sin x)^2$ Taylorin kehitelmä jossa polynomi on astetta 6. Ohje: Kerro tunnettu kehitelmä $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$ itsensä kanssa.
5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2}$$

Käyttämällä Taylorin kehitelmiä.

6. Valitaan tarkasteluväliksi $[0, 1]$ ja funktioksi $f(x) = e^x$. Valitaan lisäksi välin $[0, 1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.
7. Selvitä integraalin $\int_0^1 e^x dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Ohje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \rightarrow \infty$.
8. Määritä integraalilaskennan keinoin pinta-ala joka jää käyrän $y = \sqrt{1-x^2}$ ja x -akselin väliin kun $x \in [-1, 1]$. Ohje: Kts. esim. edellisen demokerran tehtävää 5.
9. Määritä pinta-ala joka jää käyrän $f(x) = |\sin x|$ ja x -akselin väliin kun $x \in [-\pi, \pi]$.