

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 4, 18.10.2022

1. Etsi funktiolle $f(x) = \sin x$ kertalukua 4 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$.

Mallivastaus: Taylorin kehitelmä on

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{0!} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 \\ &+ \frac{-\cos \frac{\pi}{2}}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 + \frac{\cos \xi}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(x - \frac{\pi}{2})^4 + \frac{\cos \xi}{120}(x - \frac{\pi}{2})^5,\end{aligned}$$

missä $\xi \in (\frac{\pi}{2}, x)$ tai $\xi \in (x, \frac{\pi}{2})$. Kehitelmän viimeinen termi on ns. virhetermi ja kysytty polynomi on

$$1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(x - \frac{\pi}{2})^4.$$

2. Funktiolla $\frac{1}{1-x}$ on pisteessä $x = 0$ tunnettu Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1}).$$

Onko siis seuraava oikein kun $x \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5} (1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} + \frac{x^3}{125} + O(x^4))?$$

Entä onko seuraava oikein kun $x \rightarrow 4$:

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{1-(x-4)} = 1 - (x-4) + (x-4)^2 - (x-4)^3 + O((x-4)^4)?$$

Kumpi näistä on oikea Taylorin kehitelmä funktiolle $f(x) = \frac{1}{5-x}$?

Mallivastaus: Jälkimmäisessä on merkkivirheitä, pitäisi olla

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{1-(x-4)} = 1 + (x-4) + (x-4)^2 + (x-4)^3 + O((x-4)^4).$$

Ensimmäinen kehitelmä on pisteessä $x = 0$ ja toinen (merkit korjattuna) pisteessä $x = 4$. Kehitelmien polynomiossa on siis approksimaatio samalle funktiolle $f(x) = \frac{1}{5-x}$, mutta eri pisteiden ympäristössä.

Mietittävää: Miksi tehtävän funktiolle ei ole mahdollista löytää Taylorin polynomiapproksimaatiota pisteen $x = 5$ ympäristössä?

3. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}$ astetta 6 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ohje: Kts. Demo 3, tehtävä 7 ja sovelta tämän jälkeen tehtävän 2 ideoita.

Mallivastaus: Demo 3, tehtävä 7 mukaan

$$\begin{aligned}
 & \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} \\
 = & -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1-(-\frac{x}{3})} \\
 = & -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \left(\frac{x}{2}\right)^6 + O(x^7)\right) \\
 = & \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \left(\frac{x}{3}\right)^5 + \left(\frac{x}{3}\right)^6 + O(x^7)\right) \\
 = & \frac{1}{6} - \frac{17}{36}x - \frac{11}{216}x^2 - \frac{113}{1296}x^3 - \frac{179}{7776}x^4 - \frac{857}{46656}x^5 - \frac{1931}{279936}x^6 + O(x^7).
 \end{aligned}$$

Kysytty polynomi on luettavissa alimmalta riviltä.

4. Etsi funktiolle $(\sin x)^2$ Taylorin kehitelmä jossa polynomi on astetta 6. Ohje: Kerro tunnettu kehitelmä $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$ itsensä kanssa.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 x \\
 = & \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) \\
 = & x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + O(x^8) \\
 - & \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} - \frac{x^8}{720} + O(x^{10}) \\
 + & \frac{x^6}{120} - \frac{x^8}{720} + \frac{x^{10}}{14400} + O(x^{12}) \\
 + & O(x^8) + O(x^{10}) + O(x^{12}) + O(x^{14}) \\
 = & x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \frac{x^8}{360} + \frac{x^{10}}{14400} + O(x^8) \\
 = & x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + O(x^8).
 \end{aligned}$$

Huomautus 1: Toiseksi viimeisin muoto on aivan oikein, mutta koska $-\frac{x^8}{360} = O(x^8)$ ja $\frac{x^{10}}{14400} = O(x^{10}) = O(x^8)$ kun $x \rightarrow 0$, voidaan nämä termit yhdistää kirjoitelmassa jo valmiina olevaan $O(x^8)$. Koska astetta 8 oleva termi on samaa suuruusluokkaa termin $O(x^8)$ ja astetta 10 oleva sitä pienempi, ei toiseksi viimeisin rivi myöskään ole millään tavoin informatiivisempi kuin viimeisin rivi.

Huomautus 2: Koska jo ensimmäisten kertolaskujen perusteella voidaan havaita että $O(x^8)$ on tarkkuus, jota parempaan ei voida päästä (tulossa esiintyy joka tapauksessa $x \cdot O(x^7) = O(x^8)$), ei ole tarpeen laskea kaikkia tuloja, vaan

voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
& \sin^2 x \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + O(x^8) \\
&\quad - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} + O(x^8) \\
&\quad + \frac{x^6}{120} + O(x^8) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + O(x^8).
\end{aligned}$$

5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2}$$

käyttämällä Taylorin kehitelmiä.

Mallivastaus: Kun $x \rightarrow 0$, on $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + O(x^8)$ ja $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10})$ ja näin ollen

$$\begin{aligned}
& \frac{x^4 + x^2 + \cos(x^2) - e^{x^2}}{\sin(x^2) - x^2} \\
&= \frac{x^4 + x^2 + 1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8) - (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + O(x^8))}{x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^{10}) - x^2} \\
&= \frac{-\frac{x^6}{6} + O(x^8)}{-\frac{x^6}{6} + O(x^8)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{-\frac{1}{6} + O(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.
\end{aligned}$$

Huomautus: Raja-arvon määrittäminen tällä tavalla saattaa herättää kysymyksen siitä kuinka korkean asteen Taylorin kehitelmä on tarpeen. Tähän ei ole olemassa yksiselitteistä vastausta. Liian korkeasta approksimoivan polynomin asteesta ei ole haittaa, mutta sellaisen etsiminen saattaa olla työlästä. Toisaalta taas alkuperäisessä lausekkeessa esiintyvä termi x^4 viittaa siihen, että tulisi etsiä approksimoiva polynomi, jonka aste on ainakin 4.

6. Valitaan tarkasteluväliksi $[0, 1]$ ja funktioksi $f(x) = e^x$. Valitaan lisäksi välin $[0, 1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Mallivastaus: Koska funktio on kasvava, saadaan minimiarvot kunkin välin alkupisteissä ja maksimiarvot päätepisteissä. Näin ollen

$$\underline{S}_{D_n} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^{k-1} = \frac{1}{n} \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

ja

$$\overline{S}_{D_n} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n}} e^{\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}} \underline{S}_{D_n}.$$

7. Selvitä integraalin $\int_0^1 e^x dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Ohje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \rightarrow \infty$.

Mallivastaus: Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$, nähdään, että ylä- ja alasummat saadaan miten tahansa lähelle toisiaan ja tästä voidaan päätellä että funktio on integroitava. Integraalin arvo on ylä- ja alasummien yhteinen raja-arvo, joka voidaan määrittää Taylorin polynomiapproksimaation avulla: Koska $e^x = 1 + x + O(x^2)$, on

$$n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = n(1 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - 1) = 1 + O(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Näin ollen

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{D_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{D_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e - 1.$$

8. Määritä integraalilaskennan keinoin pinta-ala joka jää käyrän $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja x -akselin väliin kun $x \in [-1, 1]$. Ohje: Kts. esim. edellisen demokerran tehtävää 5.

Mallivastaus: Pinta-ala saadaan integraalina

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \arccos 1 - (-\frac{1}{2} \arccos(-1)) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

9. Määritä pinta-ala joka jää käyrän $f(x) = |\sin x|$ ja x -akselin väliin kun $x \in [-\pi, \pi]$.

Mallivastaus: Pinta-ala saadaan integraalina

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx.$$

Integrandin itseisarvomerkki voidaan poistaa jakamalla integrointiväli sellaisiin osaväleihin, joissa $\sin x$ ei vaihda merkkiä:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx &= \int_{-\pi}^0 |\sin x| dx + \int_0^{\pi} |\sin x| dx \\ &= \int_{-\pi}^0 -\sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \cos x + \int_0^{\pi} -\cos x \\ &= \cos 0 - \cos(-\pi) + (-\cos \pi - (-\cos 0)) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$