

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2022

Demonstraatio 5, 25.10.2022

1. Olkoon $h(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\cos t - 1}{t^2} dt$. Laske $h'(x)$.
2. Astroidi on käyrä, jolla on parametriesitys $\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$. Laske astroidin kaaren pituus välillä $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Esitä integraalilauseke sen kappaleen pinta-alalle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ ($M > 1$) määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x -akselin ympäri. Päätyjen pinta-aloja ei lasketa mukaan. Ohje: Luento 19.10.
4. Newtonin gravitaatiolain mukaan kappaleiden (massat M ja m , etäisyys s) välinen voima on $F = \gamma \frac{Mm}{s^2}$, missä γ on gravitaatiovakio ja etäisyys s tarkoittaa massakeskipisteiden välistä etäisyyttä.

Tarkastellaan tilannetta jossa toinen kappaleista on maapallo (massa M , säde R) ja toinen pieni kappale (massa m), joka nostetaan tasaisella nopeudella maapallon pinnalta korkeudelle h . Tällöin massakeskipisteiden välinen etäisyys kasvaa arvosta R arvoon $R+h$. Kirjoita nostamisessa tehty työ integraalilausekkeena ja määritä sen arvo. Ohje: Luentoruudut 19.10.

Oletetaan lopuksi että h on hyvin pieni R :n verrattuna. Käytä Taylorin approksimaatiota saadulle lausekkeelle ja vakioille arvoja $\gamma = 6.6734 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6371 \cdot 10^3 \text{ m}$ esittääksesi työn likiarvon muodossa $C \cdot m \cdot h$. Minkä likiarvon saat vakiolle C ?

Ohje: Jos tehty työ on laskettu oikein, esiintyy siinä lauseke $\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}$. Ottamalla $\frac{1}{R}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R}} \right).$$

Käytä tunnettua Taylorin approksimaatiota sulkujen sisällä olevaan osamäärälausekkeeseen.

5. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$$

ja

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$$

Ohje: Antiderivaattojen etsimiseksi saattaa sijoitus $x = e^t$ toimia.

6. Etsi sopivat vertailufunktiot ja päättelä niiden perusteella suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{2x + 1}{3x^2 + 4x + 1} dx.$$

7. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppeneeko seuraava integraali:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Ohje: Olkoon $\epsilon \in (0, 1)$. Laske integraali ensin välillä $[\epsilon, 1]$ ja selvitä mitä tapahtuu, kun $\epsilon \rightarrow 0+$.

8. Suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} dx$$

ja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} dx.$$

Ohje: Vertaa sopivaan integraaliin.

9. Selvitä suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Ohje vertaan sarjan peräkkäisiä termejä ja selvitä onko niiden osamäärä $\leq c < 1$, kun n on kyllin suuri.

10. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

summa. Ohje: Aloita tunnetusta sarjasta (geometrinen)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ja derivoi molemmat puolet, oikea puoli termeittäin. Kerro x :llä puolittain ja sijoita lopuksi x :n paikalle sopiva luku.