

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Vektoriavaruus (äärellisulotteinen prototyyppi)

- Vektoreiden joukko $\mathbb{R}^n$, skalaarikunta $\mathbb{R}$
- $c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n)$,
- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- Yleistys: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, missä $\mathbb{K}$ on jokin muu kunta.

Huomautus

Insinöörimatematiikan kursseilla vektoreita esitetään yleensä lihavoidulla merkinnällä, esim. ***a***. Fysiikan kursseilla on tapana merkitä ylänuoli $\vec{a}$ tai yläviiva $\bar{a}$ ja varsinkin yksikkövektoreille käytetään hattumerkintää $\hat{a}$. Vanhemmassa kirjallisuudessa käytetään fraktuurakirjasinta $\mathfrak{a}$. Taululle (ja piirtopöydälle) kirjoitettuna lihavoinnin ***a*** sijasta käytetään yleensä alaviivaa *a*.

Algebraallinen rakenne

Vektoreiden joukko on kommutatiivinen ryhmä:

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $(\exists \mathbf{0})(\forall \mathbf{u})(\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u})$
- $(\forall \mathbf{u})(\exists -\mathbf{u})(\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

Skalaarikertolasku toteuttaa:

- $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
- $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$

Määritelmä

Vektoreiden $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ *linearikombinaatio* on muotoa

$$c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$$

oleva lauseke, missä $c_1, \dots, c_n$ ovat skalaarikunnan $\mathbb{K}$ alkioita. Kaikkien vektorijoukosta $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ muodostettujen lineaarikombinaatioiden joukosta käytetään merkintää

$$L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad \text{tai} \quad \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$$

Lause

Joukko $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ on suljettu skalaarikertolaskun ja vektoriyhteenlaskun suhteen.

Määritelmä

Vektoriavaruus V on äärellisesti generoitu, jos on olemassa sellainen äärellinen joukko G , että $V = \langle G \rangle$.

Esimerkki

Avaruudella $\mathbb{R}^n$ (samoin kuin avaruudella $\mathbb{C}^n$) on generoiva joukko

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

koska jokainen $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Määritelmä

Vektoreiden $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ *linearikombinaatio* on muotoa

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

oleva lauseke, missä $c_1, \dots, c_n$ ovat skalaarikunnan $\mathbb{K}$ alkioita. Kaikkien vektorijoukosta $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ muodostettujen lineaarikombinaatioiden joukosta käytetään merkintää

$$L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad \text{tai} \quad \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Lause

Joukko $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ on suljettu skalaarikertolaskun ja vektoriyhteenlaskun suhteen. (aliavaruus)

Määritelmä

Vektoriavaruus V on äärellisesti generoitu, jos on olemassa sellainen äärellinen joukko G , että $V = \langle G \rangle$.

Esimerkki

Avaruudella $\mathbb{R}^n$ (samoin kuin avaruudella $\mathbb{C}^n$) on generoiva joukko

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

Huomautus

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ merkitään yleensä $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Huomautus

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ merkitään yleensä $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ja $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Esimerkki

Joukko $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Esimerkki

Joukko $\{\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\}$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + y(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Esimerkki

Joukko $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\}$ generoi avaruuden $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0 \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ on lineaarisesti riippuva, jos jokin joukon vektoreista $\mathbf{x}_i$ voidaan esittää muiden lineaarikombinaationa:

$$\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + c_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \dots + c_n\mathbf{x}_n$$

Vastakohta: Lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorijoukko $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ on lineaarisesti riippumaton: Ei ole mahdollista esittää vektoria $\mathbf{i}$ muodossa $\mathbf{i} = c\mathbf{j}$,
 $\Leftrightarrow (1, 0) = c(0, 1)$.

Esimerkki

Avaruuden vektorijoukko $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\}$ on lineaarisesti riippuva:

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = 1 \cdot \mathbf{i} + 1 \cdot \mathbf{j}.$$

Lause

Vektorijoukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ on lineaarisesti riippumaton tarkalleen silloin kun yhtälöllä

$$c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

on ainoastaan ilmeinen ratkaisu $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Esimerkki

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (a, b) = (0, 0),$$

mikä toteutuu vain jos $a = 0$ ja $b = 0$.

Esimerkki

$$1 \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 1 \cdot \mathbf{i} - 1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Esimerkki

Vektorijoukko

$\{(1, 2, -2, 0), (2, -3, 1, 2), (-1, 2, -2, 3), (0, -1, 2, 1)\}$ on lineaarisesti riippumaton mikäli yhtälöllä

$$\begin{aligned} c_1(1, 2, -2, 0) + c_2(2, -3, 1, 2) \\ + c_3(-1, 2, -2, 3) + c_4(0, -1, 2, 1) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

on vain ilmeinen ratkaisu $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0)$. Kyseinen vektoryhtälö voidaan kirjoittaa yhtälöryhmänä

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} c_1 & +2c_2 & -c_3 & & = & 0 \\ 2c_1 & -3c_2 & +2c_3 & -c_4 & = & 0 \\ -2c_1 & +c_2 & -2c_3 & +2c_4 & = & 0 \\ & 2c_2 & +3c_3 & +c_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Määritelmä

Vektoriavaruuden V osajoukko B on *kanta*, jos

- $V = \langle B \rangle$
- B on lineaarisesti riippumaton

Huomautus

Edellisen määritelmän perusteella kanta on aina generoivan joukon osajoukko, minimaalinen generoiva joukko. Jos siis vektoriavaruus on äärellisesti generoitu, on sillä myös äärellinen kanta.

Lause

Äärellisesti generoidun vektoriavaruuden kaikissa kannoissa on yhtä monta alkia.