

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M , että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$

Lause

Jos funktiolla f on raja-arvo $A \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0 , siis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, niin silloin funktio f on rajoitettu jossakin pisteen x_0 ympäristössä.

Lause

Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, on olemassa sellainen x_0 :n ympäristö I , että $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ aina kun $x \in I$.

Lause

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ja $c \in \mathbb{R}$. Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
- Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
- Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ja $\lim_{x \rightarrow y} g(x) = z$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z$.

Esimerkki

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 3} &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \\ &= \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ?$$

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Jos nimittäin $x > 2$, voidaan kirjoittaa $x = 2 + \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\epsilon} > 0$, ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä suurempi on $\frac{1}{\epsilon}$.

Toisaalta, jos $x < 2$ voidaan kirjoittaa $x = 2 - \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{\epsilon} < 0$ ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä pienempi on $-\frac{1}{\epsilon}$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$
$$\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \rightarrow f(x) > M)$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön.*

Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin $-\infty$ sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jos siis $d(0, x) = |x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$, on $\frac{1}{x^2} > M$.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$

ei ole olemassa myöskään äärettömänä.

Jos olisi (∞) , pitäisi olla $\frac{1}{x-2} > 100$ aina, kun $d(x, 2) < \delta_{100}$. Näin ei voi olla, sillä arvoilla $x < 2$ on $\frac{1}{x-2} < 0$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y \\ \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(x, x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \\ \rightarrow d(f(x), y) < \epsilon). \end{aligned}$$

Tällöin sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$.
Vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y$ määritellään analogisesti ja merkitään $f(x_0-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0 , jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{jos } x \neq 2 \\ 0, & \text{jos } x = 2. \end{cases}$$

on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty reaalifunktio, ei jatkuva pisteessä $x = 2$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 1$.

Määritelmä

Funktio f on *jatkuva välillä* $I = [a, b]$, jos f on jatkuva jokaisessa I :n pisteessä.

Esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

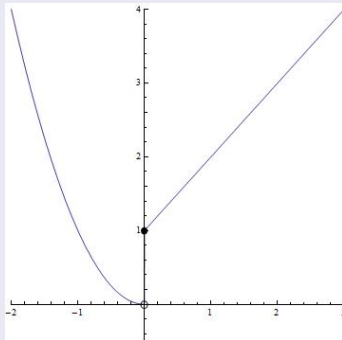
Funktio f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbb{Q}$.

Määritelmä

- Olkoon f määritelty jollakin välillä $[x_0, b)$ ja
 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on oikealta jatkuva pisteessä x_0 .
- Olkoon f määritelty jollakin välillä $(a, x_0]$ ja
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on vasemmalta jatkuva pisteessä x_0 .

Määritellään $f(x)$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0, \\ x + 1, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$



Pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva, vasemmalta epäjatkuva.

Lause

Olko $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I . Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Muistutus

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Lause

Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.