

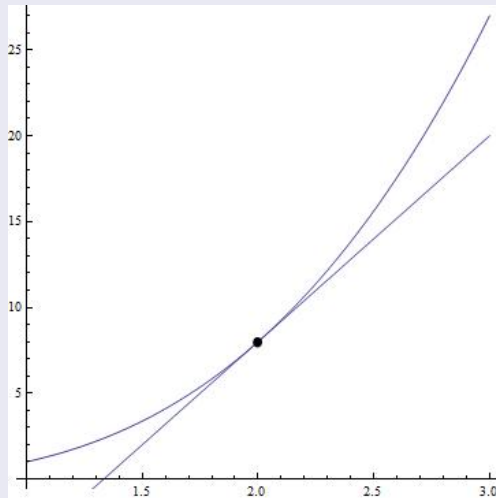
Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle



Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle

$$f(x) \approx kx + b$$

ja lisäksi

$$f(x_0) = kx_0 + b$$

Koordinaatiston siirto

Merkitään $x = x_0 + h$, jolloin

$$f(x_0 + h) \approx k(x_0 + h) + b = kh + kx_0 + b = kh + f(x_0),$$

siis

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx kh$$

Määritelmä

Reaalifunktio f on derivoituva pisteessä x , jos on olemassa $k \in \mathbb{R}$ ja funktio $\epsilon(h)$, jolle $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$ siten, että

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h).$$

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x , jos sitä voidaan x :n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Huomautus

Lähellä nollaa olevilla h :n arvoilla on ns. jäännöstermi $h\epsilon(h)$ pienempi kuin kh . Huomaa lisäksi, että jos $|h| < 1$, on $|h^2| < |h|$, $|h^3| < |h^2|$, ... jne.

Esimerkki

Jos $f(x) = x^3$, on

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + \underbrace{h(3xh + h^2)}_{\epsilon(h)} \end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$, joten $f'(x) = 3x^2$.

Huomautus

$$f(x+h) - f(x) = kh + h\epsilon(h) \Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \epsilon(h),$$

josta nähdään, että

$$k = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Määritelmä 2

Funktio f on derivoituva pisteessä x , jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa (äärellisenä).

Määritelmä

Funktion keskimääräinen kasvunopeus k välillä $[x, x + h]$ on funktion arvon muutos suhteessa x :n muutokseen h :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = k \Rightarrow f(x + h) - f(x) = kh$$

Esimerkki

Jos $f(x) = kx + b$, on

$$f(x + h) - f(x) = k(x + h) + b - (kx + b) = kh$$

Määritelmä

Jos funktio f on derivoituva pisteessä x , on

$$f(x + h) - f(x) = kh + h\epsilon(h)$$

ja siksi funktion f kasvunopeus pisteessä x määritellään $k = f'(x)$.

Lause

Jos f on derivoituva pisteessä x_0 , on se myös jatkuva pisteessä x_0 .

Määritelmä

Jos f on derivoituva (avoimen) välin I jokaisessa pisteessä, sanotaan, että f on derivoituva välillä I . Funktiota $x \mapsto f'(x)$ sanotaan f :n *derivaattafunktioksi*.

Derivaattafunktiosta käytetään $f'(x)$:n lisäksi merkintöjä $Df(x)$, $D_x f(x)$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{df}{dx}$ ja mikäli merkitään $y = f(x)$, myös merkinnät $\frac{dy}{dx}$ ja y' ovat tavallisia. Jos tuntemattomia on useita ja ainoastaan x :n muutosta tarkastellaan, käytetään osittaisderivaattamerkintää $\frac{\partial f}{\partial x}$ tai $D_x f(x)$.

Historiaa

Leibnitzin merkintä

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

sisältää differentiaalilaskennan varhaisvaiheissa vallineen ajatuksen "äärettömän pienten" suureiden dy ja dx osamäärästä, dx ja $dy = f(x + dx) - f(x)$ ovat äärettömän pieniä (infinitesimaalisia) lisäyksiä x :lle ja y :lle.

Nykyisessä (standardimuotoisessa) differentiaalilaskennassa merkintä $\frac{dy}{dx}$ ei ole osamäärä, vaan ainoastaan derivaatan merkintätapa.

Esimerkki

Merkintöjen $\frac{df}{dx}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x}$ ero, kun $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja $y = 3x^2$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx}9x^4 = 2x + 36x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

Esimerkki

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = ?$$

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I , niin $f'(x) = 0$ välillä I .

Todistus

$$f(x + h) - f(x) = c - c = 0 \cdot h.$$

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$.
Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.