Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Derivaatta

Määritelmä 1

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h) \approx k \cdot h$$

missä $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0.$

Määritelmä 2

Raja-arvo $k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ on olemassa

Huomautus

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x, jos sitä voidaan x:n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Derivointisääntöjä

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I, niin $f'(x) = 0$ välillä I.

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivointisääntöjä

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.

Lause: Osamäärän derivaatta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}(f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\Big(-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Derivointisääntöjä

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Derivointisääntöjä

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.
Jos $k > 0$, on

$$\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k - x^k \\
&= k x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k \\
&= k x^{k-1} h + h \underbrace{\left(\binom{k}{2} x^{k-2} h^1 + \ldots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.
\end{aligned}$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I, derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

"Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

Sinifunktion derivaatta

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x) \\
= \quad & \frac{1}{h} \cdot 2\cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2} \\
= \quad & \frac{\cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \to 0} \cos x.
\end{aligned}
$$

Derivointisääntöjä

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx}x^\alpha?$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$$

Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

Implisiittimuoto

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee käyrän $\mathbb{R}^2$:ssa. Käyrän osa, jossa $y \geq 0$ määrittelee funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Derivoimalla implisiittisesti saadaan

$$2x + 2yy' = 0,$$

josta

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\},$$

missä

$$f(\cos t) = \sin t,$$

josta t:n suhteen derivoimalla saadaan

$$f'(\cos t)(-\sin t) = \cos t.$$

Tästä

$$f'(\cos t) = -\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Parametrimuoto

Yleisesti

$$f(x(t)) = y(t),$$

josta derivoimalla t:n suhteen saadaan

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t)$$

ja siis

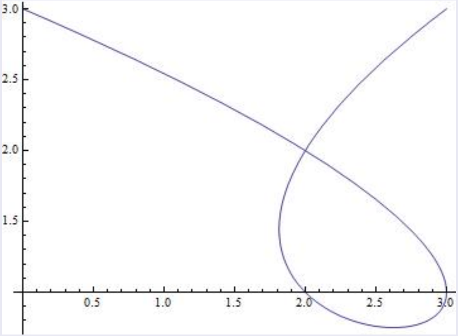
$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Leibnitzin merkinnöillä voidaan siis kirjoittaa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Esimerkki

$A = \{(t^3 - 2t^2 + 3, t^2 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



Funktio pisteen $(2, 1)$ ympäristössä. $f'(2)$?

Esimerkki

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 3y^4 = 37$$

pisteen $(1, 2)$ ympäristössä.

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, jne.
- $D_x^2 f$, $D_{yx} f$, $D_{xy} f$, $D_y^2 f$ jne.

Useampikertaiset derivaatat

Esimerkki

- $D \sin x = \cos x$, $D^2 \sin x = -\sin x$, $D^3 \sin x = -\cos x$ ja $D^4 \sin x = \sin x$, $D^5 \sin x = \cos x$, jne.
- $De^x = e^x$, $D^2 e^x = e^x$, $D^3 e^x = e^x$, jne.

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).$$

Huomautus

Mahdollisesti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Derivointijärjestyksen voi kuitenkin vaihtaa, jos f on riittävän säännöllinen (toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia).