

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Antiderivaatta

Määritelmä

Jos $F'(x) = f(x)$, sanotaan, että $F(x)$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta (kantafunktio, primitiivifunktio, määräämätön integraali)

Esimerkki

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} (n+1) x^n = x^n.$$

Huomautus

Jos $F(x)$ on $f(x)$:n antiderivaatta ja C vakio, on

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x),$$

joten myös $F(x) + C$ on antiderivaatta.

Määritelmä

Funktion $f(x)$ antiderivaatoista käytetään merkintää

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

ja $f(x)$:ää kutsutaan integrandiksi.

Huomautus

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

ja

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Huomautus

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ jos } n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

Huomautus

Tulon derivointisääntö $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ei tuota helppoa sääntöä tulon antiderivaatalle, mutta siitä seuraa, että

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

Osittaisintegrointi

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Esimerkkejä

- $\int \ln x \, dx$
- $\int x \sin x \, dx$
- $\int x^2 e^x \, dx.$

Muistisääntö sijoitukseen

Laskettaessa antiderivaattaa

$$\int f(x) dx$$

voidaan sijoittaa $x = g(t)$, jolloin $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ ja siis

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkki

$$\int \frac{1}{(5 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad x = \sqrt{5} \sin t.$$

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx?$$

Derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)^n} = -\frac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}.$

Esimerkki

$$\int \frac{4x + 3}{(2x^2 + 3x - 1)^2} dx = -\frac{1}{2x^2 + 3x - 1} + C$$

Esimerkki

$$\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

Rollen lause

Jos f on välillä $[a, b]$ derivoituva ja $f(a) = f(b)$, on maksimi- tai minimikohdassa välillä $[a, b]$ voimassa $f'(\xi) = 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) , niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a).$$

Integraalilaskennan (antiderivaattojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I .

Todistus

Jos $a, x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I , niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Todistus

Funktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, joten se on vakio C välillä I .

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0.$$

Huomautus

Jos välillä (a, b) on $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, tai $f'(x) < 0$, voidaan vastaavasti todistaa, että funktio f on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ , jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. □

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.