Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.

l'Hospitalin sääntö

Lause (l'Hospital)

Olkoon $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a,x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x\to 0} 0$.

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \to 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \to 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

Käyrän tangentti

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.

Käyrän tangentti

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.
- Yksikköympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö.

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Esimerkki

Pallon sädettä kasvatetaan prosentin verran. Paljonko kasvaa tilavuus?

Funktion kulku

Määritelmä

Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Määritelmä

Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Huomautus

Jos f on derivoituva, on Rollen lauseen todistuksen perusteella ääriarvopisteissä x_0 on välttämättä $f'(x_0) = 0$.

Funktion kulku

Huomautus

Voidaan todistaa: Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, on x_0 lokaali maksimi. Jos taas $f''(x_0) > 0$, on x_0 lokaali minimi. Jos taas $f''(x_0) = 0$, ei x_0 välttämättä ole ääriarvopiste, vaan voi olla ns. satulapiste.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x)\, dx + C.$$

Vakio C määräytyy ns. alkuehdon (reunaehdon) $y(0) = y_0$ perusteella.

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.770238093708461\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.770238093708461\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.717744903843273\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.770238093708461\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.717744903843273\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.753290792082463\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.770238093708461\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.717744903843273\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.753290792082463\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.729441779647686\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.770238093708461\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.717744903843273\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.753290792082463\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.729441779647686\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.745546546426255\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 2211.2018$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.887258856667587\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.631539724288158\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.807119430361757\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.691581929093085\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.770238093708461\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.717744903843273\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.753290792082463\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.729441779647686\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.745546546426255\ldots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.734717249539530\ldots$

Esimerkki

$$x = 0.739085133215160641655312087673\ldots$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräisratkaisut

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä (binary search)

Likimääräisratkaisut

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä (binary search)
- Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.

Likimääräisratkaisut

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$,

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita

$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$
- $x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ voi siis olla x:ää parempi likiarvo nollakohdalle.

Likimääräisratkaisut

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Esimerkki

Valitaan $N > 0$ ja sovelletaan Newtonin menetelmää funktioon $f(x) = x^2 - N$

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0,1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Likimääräisratkaisut

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0, 1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \le c \cdot d(x, y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Kiintopistelause

Jos f on kutistava kuvaus välillä I, on f:llä myös kiintopiste $x_f \in I$. Mikä hyvänsä jono $x_0 \in I$, $x_{i+1} = f(x_i)$ lähestyy kiintopistettä x_f.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Esimerkki

Newtonin menetelmän analysointi.

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h$$

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2$$

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3$$

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Taylorin polynomit

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

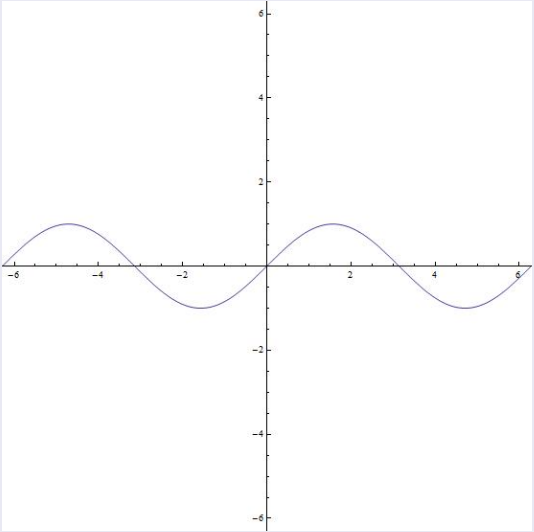
Korkeamman asteen approksimaatiot:

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Merkitään vielä $c_0 = f(x)$, jolloin

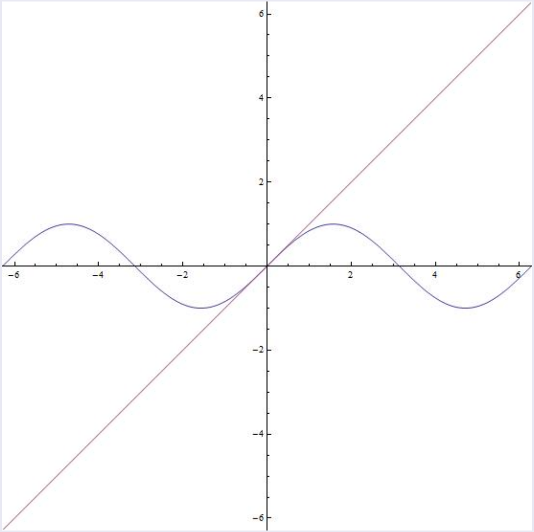
$$f(x+h) \approx c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Sinifunktion approksimaatioita

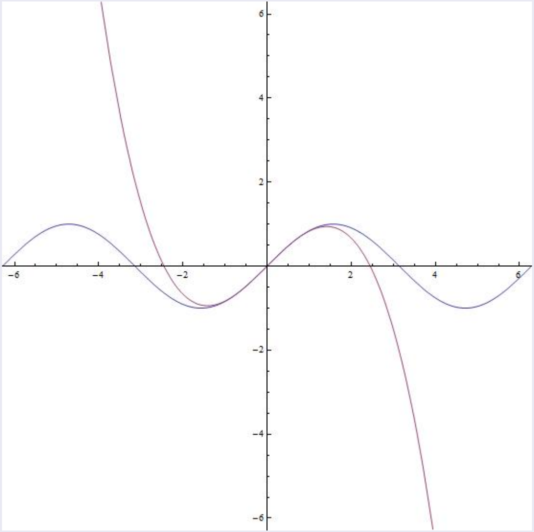


Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita

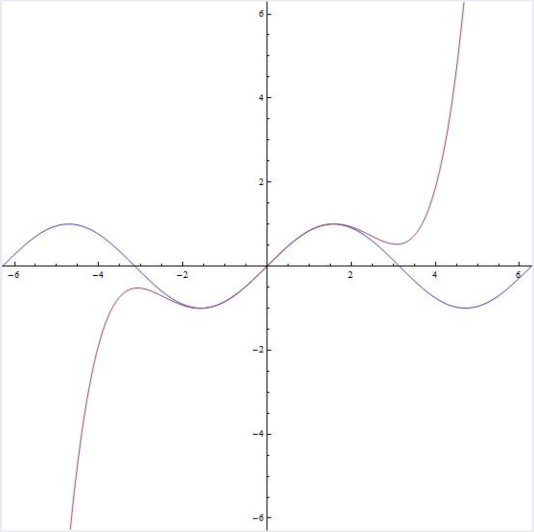


Sinifunktion approksimaatioita

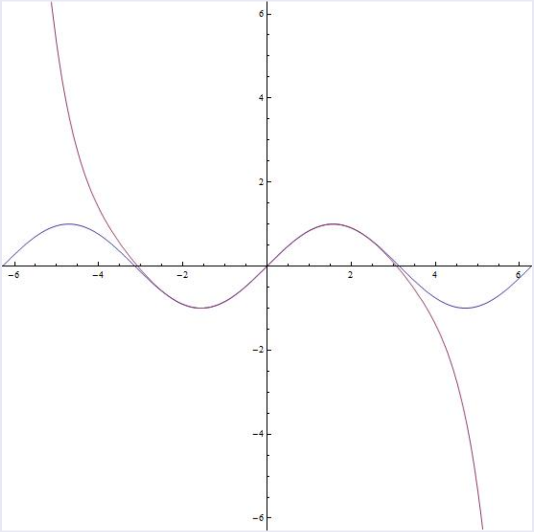


Taylorin polynomit

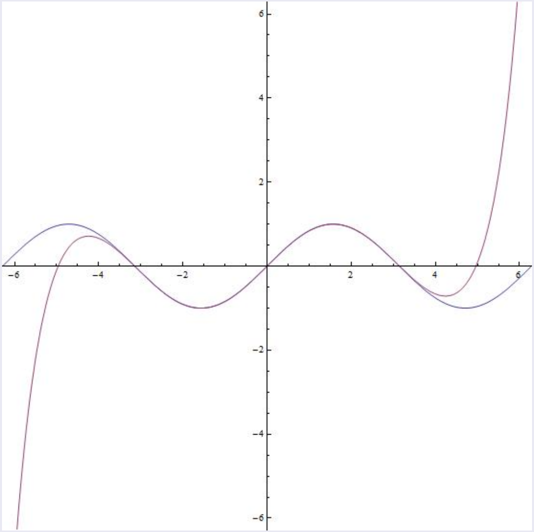
Sinifunktion approksimaatioita



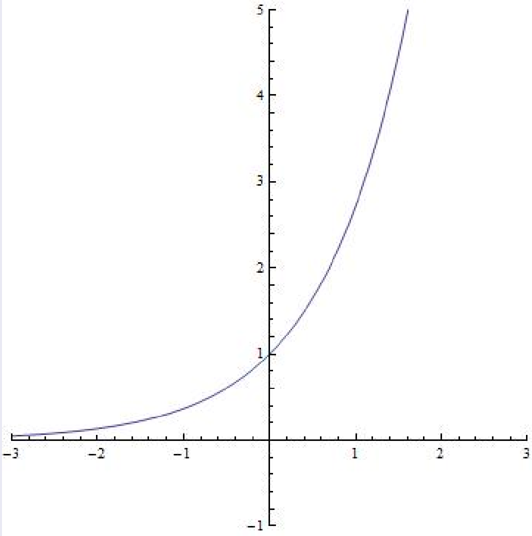
Sinifunktion approksimaatioita



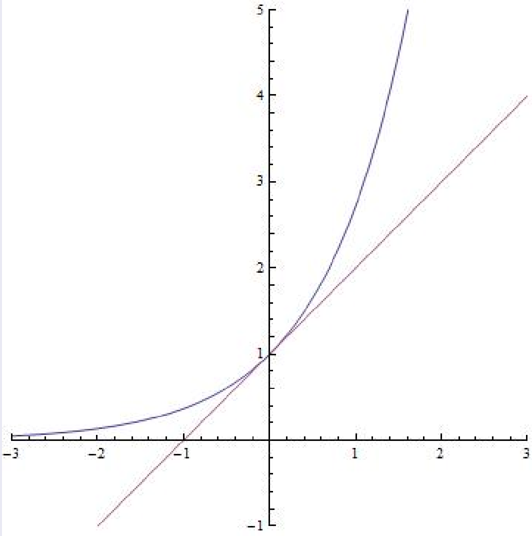
Sinifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita

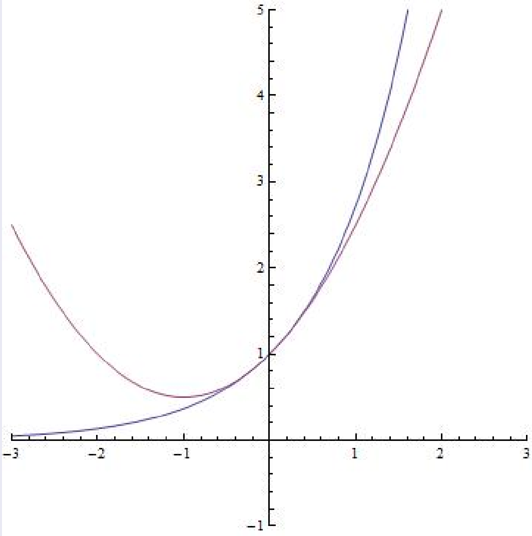


Eksponenttifunktion approksimaatioita



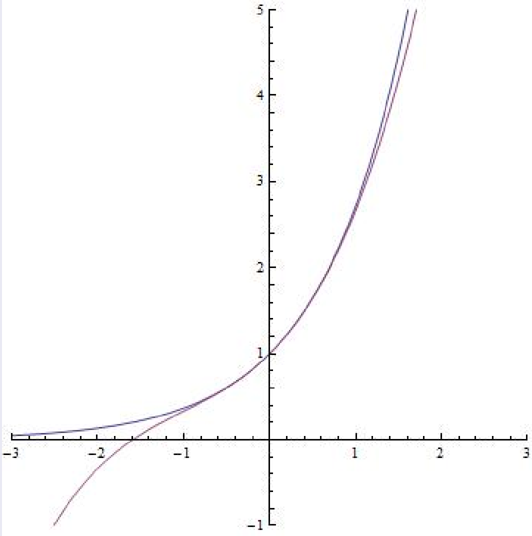
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



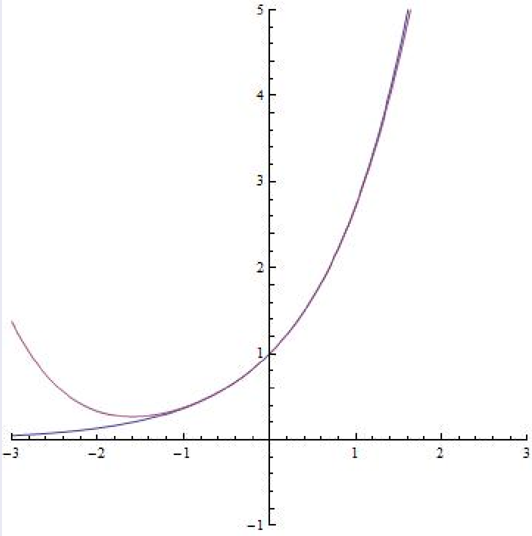
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita