

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Uusi aika

- Isaac Newton (1642–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Uusi aika

- Isaac Newton (1642–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Linkki differentiaalilaskentaan

Newtonin-Leibnizin kaava

Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)

Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)

Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)
- Johtavat samaan integraalikäsitteeseen, Darboux'n esitys yksinkertaisempi

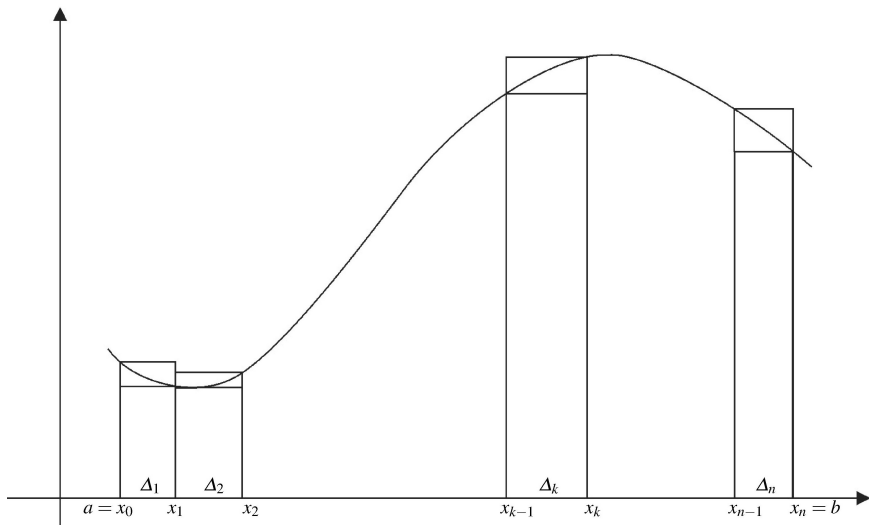
Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)
- Johtavat samaan integraalikäsitteeseen, Darboux'n esitys yksinkertaisempi

Yleistyksiä (ei kuulu kurssiin)

- Stieltjesin integraali
- Lebesguen integraali
- Haarin integraali

Darboux'n integraali



Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$.

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$.
- $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ on jaon i :s väli

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$.
- $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ on jaon i :s väli
- $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ on i :nnen välin pituus

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$.
- $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ on jaon i :s väli
- $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ on i :nnen välin pituus
- $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$.
- $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ on jaon i :s väli
- $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ on i :nnen välin pituus
- $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$
- $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$

Määritelmä

Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x$$

Määritelmä

Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x$$

Lause

Jokaiselle jaolle D pätee

$$\underline{S}_D \leq \overline{S}_D.$$

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Lause

Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, niin $\overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}$ ja $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$.

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Lause

Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, niin $\overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}$ ja $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$.

Lause

Mikään alasumma ei voi ylittää mitään yläsummaa, siis $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$ kaikille jaolle D_1 ja D_2 .

Huomautus

Välin $[a, b]$ jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa ylä- ja alasummat $\overline{S}_{D_0} = M(b - a)$ ja $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$, missä M ja m ovat funktion f supremum- ja infimum koko välillä $[a, b]$.

Huomautus

Välin $[a, b]$ jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa ylä- ja alasummat $\overline{S}_{D_0} = M(b - a)$ ja $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$, missä M ja m ovat funktion f supremum- ja infimum koko välillä $[a, b]$.

Lause

Alasummien joukko on on ylhäältä rajoitettu ja yläsummien alhaalta rajoitettu.

Määritelmä

Funktion f yläintegraali välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b f = \inf \{ \bar{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako} \}$$

ja alaintegraali

$$\int_a^b f = \sup \{ \underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako} \}$$

Määritelmä

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio on Darboux-integroituva (ja samalla Riemann-integroituva), mikäli

$$\int_a^b f = \int_{\frac{b}{a}}^b f.$$

Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Darboux- tai Riemann-) integraaliksi välillä $[a, b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integrointivälin tai integraalin ala- ja ylärajoiksi ja funktiota f integrandiksi.

Esimerkki

- Esimerkki: Vakiofunktio
- Esimerkki Joukon $\mathbb{Q}$ karakteristinen funktio.

Esimerkki

- Esimerkki: Vakiofunktio
- Esimerkki Joukon $\mathbb{Q}$ karakteristinen funktio.

Lause

Jos $\mathcal{D}'$ on jokin kokoelma välin $[a, b]$ jakoja ja

$$I = \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\} = \inf\{\overline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\},$$

niin tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = I.$$

Esimerkki

Esimerkki $f(x) = x^2$, tasavälinen jako välillä $[0, 1]$.

Esimerkki

Esimerkki $f(x) = x^2$, tasavälinen jako välillä $[0, 1]$.

Riemannin integroituvuusehto

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D , että

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = d(\overline{S}_D, \underline{S}_D) \leq \epsilon.$$

Darboux'n integraali

Esimerkki

Esimerkki $f(x) = x^2$, tasavälinen jako välillä $[0, 1]$.

Riemannin integroituvuusehto

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D , että

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = d(\overline{S}_D, \underline{S}_D) \leq \epsilon.$$

Lause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva välillä $[a, b]$.

Darboux'n integraali

Esimerkki

Esimerkki $f(x) = x^2$, tasavälinen jako välillä $[0, 1]$.

Riemannin integroituvuusehto

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroitava tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D , että

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = d(\overline{S}_D, \underline{S}_D) \leq \epsilon.$$

Lause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, on se myös integroitava välillä $[a, b]$.

Lause

Jos integroituvan funktion arvoa muutetaan yhdessä pisteessä, säilyy sekä integroituvuus että integraalin arvo.

Lause

Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Lause

Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^n cf_i = c \sum_{i=1}^n f_i$$

$$\sum_{i=1}^n (f_i + g_i) = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n g_i.$$

Lause

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Lause

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^m f_i + \sum_{i=m+1}^n f_i.$$

Lause

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^m f_i + \sum_{i=m+1}^n f_i.$$

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$, niin samoin on $f \pm g$ ja fg . Jos lisäksi $\frac{1}{g}$ on rajoitettu välillä $[a, b]$, niin myös $\frac{f}{g}$ on integroituva.

Määritelmä

Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

ja

$$\int_a^a f = 0.$$

Määritelmä

Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

ja

$$\int_a^a f = 0.$$

Seuraus

Jos f on integroituva välillä I , on

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

kaikille välin I luvuille a , b ja c .

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f \leq g$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f \leq g$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Vertaa: Jos $f_i \leq g_i$, on

$$\sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n g_i$$

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f \leq g$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Vertaa: Jos $f_i \leq g_i$, on

$$\sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n g_i$$

Lause

Jos $f \geq 0$ on jatkuva välillä $[a, b]$ niin $\int_a^b f \geq 0$ ja $= 0$ tarkalleen silloin kun $f = 0$ välillä $[a, b]$.

Kolmioepäyhtälö

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Kolmioepäyhtälö

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Vertaa:

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f_i|.$$

Kolmioepähtälö

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Vertaa:

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f_i|.$$

Huomautus

Jos $a > b$, on

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Funktiota $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan f :n integraalifunktioksi.

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Funktiota $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan f :n integraalifunktioksi.

Lause

Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I .

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Funktiota $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan f :n integraalifunktioksi.

Lause

Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I .

Esimerkki

$f(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

Analyysin peruslause

Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Analyysin peruslause

Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Seuraus

Välillä I jatkuvalla funktiolla on olemassa antiderivaatta.

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ = & \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \end{aligned}$$

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \end{aligned}$$

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x)) dt \end{aligned}$$

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x)) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(x) dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \end{aligned}$$

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x)) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(x) dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \\ &= f(x) \cdot h + h \cdot \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt}_{\epsilon(h)} \end{aligned}$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$|\epsilon(h)| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right|$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} |\epsilon(h)| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \end{aligned}$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} |\epsilon(h)| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} \varepsilon dx \right| \end{aligned}$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} |\epsilon(h)| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} \varepsilon dx \right| \\ &= \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Newtonin–Leibnizin kaava

Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä

Merkintä "sijoitus a :sta b :hen" määritellään

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä

Merkintä "sijoitus a :sta b :hen" määritellään

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta.

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Jos $F(x)$ on jokin toinen antiderivaatta, on integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Jos $F(x)$ on jokin toinen antiderivaatta, on integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Sijoittamalla $x = a$ nähdään, että $0 = F(a) + C$, mistä $C = -F(a)$.

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Jos $F(x)$ on jokin toinen antiderivaatta, on integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Sijoittamalla $x = a$ nähdään, että $0 = F(a) + C$, mistä $C = -F(a)$. Sijoittamalla $x = b$ saadaan

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Analogia

Määritellään differenssi Δf seuraavasti: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.
Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \Delta f(k) &= \Delta f(1) + \Delta f(2) + \dots + \Delta f(n) \\ &= (f(n+1) - f(n)) + (f(n) - f(n-1)) \\ &\quad + \dots + (f(3) - f(2)) + (f(2) - f(1)) \\ &= f(n+1) - f(1)\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ x + 1, & \text{kun } x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^2 f(x) \, dx?$$

Esimerkki

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ x + 1, & \text{kun } x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^2 f(x) \, dx?$$

Esimerkki

$$h(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} \, dx, \quad h'(x)?$$

Osittaisintegrointi

$$\int_a^b fg' = \left[fg \right]_a^b - \int_a^b f'g$$

Osittaisintegrointi

$$\int_a^b fg' = \left[fg \right]_a^b - \int_a^b f'g$$

Esimerkki

$$\int_0^2 xe^x dx$$

Sijoitus integraaliin

Jos g' on jatkuva välillä $[\alpha, \beta]$, $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$, ja $g(\alpha) = a$ sekä $g(\beta) = b$, niin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Sijoitus integraaliin

Jos g' on jatkuva välillä $[\alpha, \beta]$, $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$, ja $g(\alpha) = a$ sekä $g(\beta) = b$, niin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

$$x = \cos t.$$

Määritelmä

Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.

Määritelmä

Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.

Esimerkki

$f(x) = x^2$ on parillinen ja $f(x) = x^3$ pariton.

Newtonin–Leibnizin kaava

Määritelmä

Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.

Esimerkki

$f(x) = x^2$ on parillinen ja $f(x) = x^3$ pariton.

Esimerkki

$\sin x$ on pariton ja $\cos x$ parillinen. Huomaa että

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8).$$

Lause

Olkoon f jatkuva välillä $[-a, a]$. Jos f on parillinen, on

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$$

ja jos f on pariton, on

$$\int_{-a}^a f = 0$$

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA$$

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx$$

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx$$

Intuitio:

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat jatkuvia, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat jatkuvia, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

(Parametrimuoto)

xy-muoto $y = f(x)$

Merkitään $x = t$, $y = f(t)$, jolloin kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Intuitio:

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Intuitio:

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Pyörähdyskappale

- Tilavuus
- Vaipan pinta-ala

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f =$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali *hajaantuu* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

I lajin epäoleellinen integraali

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

Esimerkki ($a > 0$)

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^s} \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$.
Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$
suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$.
Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$
suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

I lajin epäoleellinen integraali

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} dx \quad \text{ja} \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$$

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Esimerkki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b]$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.

Esimerkki

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_Nx^N \\ &= g(0, x) + g(1, x) + g(2, x) + \dots + g(N, x), \end{aligned}$$

missä $g(i, x) = a_i x^i$, mutta yleisempikin muoto lausekeelle $g(i, x)$ on mahdollinen.

Vielä yleisempi:

$$f(x) = \int_0^N g(t, x) dt$$

Esimerkki

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_Nx^N \\ &= g(0, x) + g(1, x) + g(2, x) + \dots + g(N, x), \end{aligned}$$

missä $g(i, x) = a_i x^i$, mutta yleisempikin muoto lausekeelle $g(i, x)$ on mahdollinen.

Vielä yleisempi:

$$f(x) = \int_0^N g(t, x) dt$$

Vieläkin yleisempi:

$$f(x) = \int_0^\infty g(t, x) dt$$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)
- Rekursio $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)
- Rekursio $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(1) = 1$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)
- Rekursio $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(n + 1) = n!$, kun $n \in \mathbb{N}$.