

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali *hajaantuu* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

Esimerkki ($a > 0$)

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^s} \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$. Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$ suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

I lajin epäoleellinen integraali

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} dx \quad \text{ja} \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Esimerkki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b]$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja määritellään analogisesti.

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Osasummat muodostavat *lukujonon* $S_1, S_2, S_3, \dots$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Esimerkki

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \dots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä

olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim S_n$.

Lause

- Jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ($k > 1$) suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

- Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Mikäli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ suppenee, sanotaan, että } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ suppenee } \textit{itseisesti}.$$

Tällöin pätee

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{vakio}).$$

Geometrinen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$

Määritelmä

Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on geometrinen, jos jono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen.

Osasumat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Jos $|q| > 1$, ei raja-arvoa $\lim q^n$ ole äärellisenä.

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$. Suppenevassa tapauksessa sarjan summa on

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a \frac{1}{1 - q}.$$

Esimerkki

Esimerkki (Akilles ja kilpikonna)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793\dots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Esimerkkejä

- Jokainen sarja

$$k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

missä $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, suppenee.

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Esimerkiksi harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, vaikka $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_{\epsilon})(M \geq M_{\epsilon} \wedge k \geq 0 \rightarrow \left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| < \epsilon)$$

"Sarja suppenee mikäli (katkaistu) loppuosa saadaan mielivaltaisen pieneksi ($< \epsilon$) valitsemalla katkaisukohta M riittävän suureksi"

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t) dt \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(t) dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \geq 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t) dt \downarrow$$

Seuraus

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \downarrow \Leftrightarrow s > 1$$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow$

Minorantti-majoranttiperiaatteen raja-arvomuoto

Oletetaan, että $\lim \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L$.

- Jos $L = 0$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow$.
- Jos $L = \infty$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow$.

Osamäärätarkastin

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta M alkaen

- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, (q vakio) niin sarja suppenee itseisesti.
- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Juuritarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Jos $L < 1$, niin sarja suppenee (itseisesti)
- Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu

Määritelmä

Jos $a_n \geq 0$, sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

on vuorotteleva.

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee. Jos lisäksi merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} a_n + R_M,$$

on

$$R_M = (-1)^M a_{M+1} + (-1)^{M+1} a_{M+2} + (-1)^{M+2} a_{M+3} + \dots$$

samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^M a_{M+1}$ ja $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ $n, m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Lause

Jos $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST .

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n.$$

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$. Tällöin sarjaa kutsutaan myös Maclaurinin sarjaksi.

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehtoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lukua R kutsutaan suppenemissäteeksi. Ensimmäisessä tapauksessa sanotaan, että $R = 0$ ja viimeisessä, että $R = \infty$.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R .

Seuraus

Potenssisarjan summafunktiolla $F(x)$ on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Esimerkkejä

Binomisarja

Arkussin sarja

EkspONENTTIFUNKTIO

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Eulerin kaava

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$