

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 1, 14.2.2023

1. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' = x^2 - x + 1$ kaikki ratkaisut ja sellainen ratkaisu, että $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 2$.

Mallivastaus: Antiderivaatta (määääämätön integraali) laskemalla saadaan

$$y' = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C_1$$

ja edelleen

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Nämä ovat kaikki ratkaisut ja aiempaan yhtälöön sijoittamalla $x = 0$ saadaan $2 = C_1$. Tällöin siis

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C_2,$$

ja edelleen $x = 0$ sijoittamalla saadaan

$$1 = C_2.$$

Täten kysytty ratkaisu on $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

2. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' + 2y = 0$ kaikki ratkaisut ja sellainen ratkaisu, että $y(0) = -1$, ja $y'(0) = 1$.

Mallivastaus: Tavallinen yrite $y = e^{\lambda t}$ tuottaa karakteristisen yhtälön

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2\}.$$

Täten yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Koska $y' = c_1e^t + 2c_2e^{2t}$, saadaan reunaehdoista yhtälöpari

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= -1 \\ c_1 + 2c_2 &= 1, \end{cases}$$

jonka ratkaisut ovat $(c_1, c_2) = (-3, 2)$.

3. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + 9y = 0$ kaikki ratkaisut.

Mallivastaus: Yritteen $y = e^{\lambda t}$ antama karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 + 9 = 0$, joka ratkaisut ovat $\lambda = \pm 3i$. Näin ollen kaikki ratkaisut ovat

$$y = c_1e^{3it} + c_2e^{-3it}.$$

4. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' - 4y' + 13y = 0$ kaikki ratkaisut. Esitä ne sekä kompleksisessa että reaalissa muodossa.

Vastaus: Standardiyritteen tuottama karakteristinen yhtälö on $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{2 - 3i, 2 + 3i\}$. Lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat siis $e^{(2-3i)t}$ ja $e^{(2+3i)t}$. Tällöin reaaliseksi, lineaarisesti riippumattomiksi ratkaisuiksi voidaan luennolla esitetyn mukaan valita $e^{2t} \cos 3t$ ja $e^{2t} \sin 3t$. Kaikki ratkaisut saadaan näiden lineaarikombinaatioina.

5. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t} + 9t^2 - 3t + 5$$

jokin yksittäinen ratkaisu käyttämällä luennolla esitettyä yritemenetelmää.

Mallivastaus: Etsitään ensin ratkaisu homogeeniselle DY:lle. Nämä saadaan karakteristisen yhtälöstä $\lambda^3 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Tämän vuoksi homogeenisella yhtälöllä on lineaarisesti riippumattomat ratkaisut $y_1 = e^{3t}$ ja $y_2 = te^{3t}$.

Etsitään ensin differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = 9t^2 - 3t + 5$$

jokin yksittäinen ratkaisu. Tämä voidaan löytää yritteellä $y = At^2 + Bt + C$, jolloin $y' = 2At + B$ ja $y'' = 2A$. Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 2A - 6(2At + B) + 9(At^2 + Bt + C) &= 9t^2 - 3t + 5 \\ \Leftrightarrow 9At^2 + (9B - 12A)t + 2A - 6B + 9C &= 9t^2 - 3t + 5, \end{aligned}$$

josta $9A = 9$, $9B - 12A = -3$ ja $2A - 6B + 9C = 5$. Näistä yhtälöistä ratkeaa $A = 1$, $B = 1$ ja $C = 1$.

Etsitään seuraavaksi differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t}$$

jokin ratkaisu. Yritteestä $y = Ae^{3t}$ kuitenkin huomataan, että se on vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu. Samoin on yritteen $y = Ate^{3t}$ laita, joten koetetaan yrittää $y = At^2e^{3t}$. Tästä saadaan $y' = 2Ate^{3t} + 3At^2e^{3t} = A(2t + 3t^2)e^{3t}$ ja edelleen $y'' = A(2 + 6t)e^{3t} + 3A(2t + 3t^2)e^{3t} = A(9t^2 + 12t + 2)e^{3t}$.

Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} A(9t^2 + 12t + 2)e^{3t} - 6A(2t + 3t^2)e^{3t} + 9At^2e^{3t} &= e^{3t} \\ \Leftrightarrow 2Ae^{3t} &= e^{3t}, \end{aligned}$$

josta saadaan $A = \frac{1}{2}$. Differentiaaliyhtälön lineaarisuuden vuoksi kysytty yksittäinen ratkaisu saadaan laskemalla saadut yksittäisratkaisut yhteen, siis

$$y_0 = \frac{1}{2}t^2e^{3t} + t^2 + t + 1.$$

6. Olkoot $y(0) = y'(0) = 0$. Merkitse $Y = Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ ja laske Laplace-muunnokset edellisen tehtävän differentiaaliyhtälöstä puolin ja toisin. Käytä kurssin verkkosivulta löytyvää taulukkoa.

Mallivastaus: Laplace-muunnoksilla saadaan yhtälö

$$s^2Y - 6sY + 9Y = \frac{1}{s-3} + \frac{18}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}$$

7. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t}$$

käyttämällä Laplace-muunnoksia ja alkuehtoja $y(0) = y'(0) = 0$. Ohje: Selvitä lopuksi miten polynomi $s^2 - 6s + 9$ jakautuu tekijöihin.

Mallivastaus: Laplace-muunnoksilla saadaan

$$s^2Y - 6sY + 9Y = \frac{1}{s-3},$$

josta

$$Y = \frac{1}{(s^2 - 6s + 9)(s - 3)} = \frac{1}{(s - 3)^3}.$$

Aiemman tehtävän mukaan nimittäin polynomilla $s^2 - 6s + 9$ on kaksinkertainen nollakohta $s = 3$ ja siksi $s^2 - 6s + 9 = (s - 3)^2$.

Käänteismuunnoksella saadaan $y(t) = \frac{t^2}{2}e^{3t}$.

8. Polynomilla $x^3 - 7x + 6$ on nollakohta $x = 1$. Päätele tästä millaisella ensimmäisen asteen polynomilla tämä on jaollinen. Suorita jako jakokulmassa ja etsi polynomin muut nollakohdat.

Mallivastaus: Polynomi voidaan jakaa 1. asteen polynomilla $x - 1$. Jakolasku tuottaa

$$\frac{x^3 - 7x + 6}{x - 1} = x^2 + x - 6.$$

Tämän nollakohdat ovat 2 ja -3 .

9. Selvitä $\gcd(x^3 - 7x + 6, x^2 - 6x + 9)$ käyttämällä aiemmissa tehtävissä esiintyneitä tekijöihinjakoja. (gcd: greatest common divisor, suomeksi suurin yhteinen tekijä).

Mallivastaus:

$$\gcd(x^3 - 7x + 6, x^2 - 6x + 9) = \gcd((x - 1)(x - 2)(x + 3), (x - 3)^2) = 1.$$