

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 2, 28.2.2023

1. Käytä Laplace-muunnoksia differentiaaliyhtälön $y' + 2y = 1 + e^{3t}$ ratkaisemiseksi reunaehdolla $y(0) = 1$.
2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3x^2y = x^2$
3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $2xy' + y = 2x^2\sqrt{x}$.
4. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

sarjaratkaisut alkuehdoilla $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ja alkuehdoilla $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Millä vakion λ arvoilla löytyy ratkaisu, joka on polynomifunktio? Ohje: Oleta funktion y olevan muotoa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivoi termeittäin derivaattaa y' varten ja toisen kerran y'' :a varten. Sijoita näin saadut lausekkeet differentiaaliyhtälöön, nosta/laske summausindeksejä sopivasti ja päättele miten kerroin a_{n+2} riippuu kertoimesta a_n . Kirjoita sarjan muutama ensimmäinen termi näkyviin.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xe^{-y}$.
6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = (x+1)(y+1)$
7. a) Myrkytyspotilaan veressä on 8 mg/l vierasta ainetta ja potilaan veren kokonaismääräksi otaksutaan 5 l. Potilaan elimistö pystyy poistamaan ainetta 0,02 mg minuutissa. Laske kuinka pian haitallisen aineen määrä on pudonnut alle turvallisen rajan 0,1 mg/l.
b) Potilaan verta kierrätetään 20 ml/min dialyysilaitteen kautta, jonka suodatin poistaa 50% haitallisesta aineesta koko ajan. Kirjoita differentiaaliyhtälö veressä olevan vieraan aineen määrälle $M(t)$ (mg), ratkaise se ja selvitä koska pitoisuus on alle turvallisen rajan.
8. Ratkaise differentiaaliyhtälö $3x^2 + 2xy + 3 + (x^2 - 4y)y' = 0$. Ohje: Yhtälö on eksakti.
9. Newtonin toisen liikelain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa F on yhtäsuuri kuin kappaleen liikemäärän $p = mv$ muutosnopeus, siis $F = \frac{d}{dt}(mv)$. Jos kappaleen massa pysyy vakiona, voidaan tämä kirjoittaa muotoon $F = m \frac{d}{dt}v = ma$, mutta muuttuvan massan tapauksessa on käytettävä tulon derivointisääntöä.

Kirjoita Newtonin lain mukainen liikeyhtälö kuvaamaan tilannetta, jossa maan pinnalta lähetettävään avaruusrakettiin vaikuttavat voimat ovat ainoastaan moottorin työntövoima F sekä maan gravitaatiovoima. Oletetaan, että työntövoima F pysyy vakiona ja samalla raketin massa m vähenee tasaisesti polttoaineen huvetessa: $m = m_0 - kt$ (k kuvaa polttoaineen kulutusnopeutta).

Kirjoita yhtälö siten, että tuntematon funktio s edustaa raketin etäisyyttä maan keskipisteestä. Esitä gravitaation suuruus Newtonin gravitaatiolain mukaisessa muodossa $G \frac{Mm}{s^2}$, missä M on maan ja m on raketin massa ja s massakeskipisteiden välinen etäisyys. Yhtälöä ei tarvitse ratkaista, mutta selvitä mitä menetelmiä saadun differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi kurssilla on toistaiseksi esitetty (jos yhtään).