

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 2, 28.2.2023

1. Käytä Laplace-muunnoksia differentiaaliyhtälön $y' + 2y = 1 + e^{3t}$ ratkaisemiseksi reunaehdolla $y(0) = 1$.

Mallivastaus: Merkitään $Y = \mathcal{L}[y(t)]$, jolloin Laplace-muunnokset laskemalla saadaan $sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-3}$ ja tästä

$$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s(s+2)} + \frac{1}{(s+2)(s-3)}.$$

Taulukon mukaan kääntämällä saadaan

$$y(t) = e^{-2t} - \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) + \frac{1}{5}(e^{3t} - e^{-2t}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}.$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3x^2y = x^2$

Mallivastaus: Ratkaistaan ensin homogeeninen DY

$$y' + 3x^2y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -3x^2,$$

josta $y = Ce^{-x^3}$. Tämän jälkeen käytetään yritettä $y = C(x)e^{-x^3}$ (vakion variointi), josta saadaan DY

$$C'(x)e^{-x^3} + C(x)(-3x^2)e^{-x^3} + 3x^2C(x)e^{-x^3} = x^2 \Leftrightarrow C'(x) = x^2e^{x^3}.$$

Tästä saadaan integroimalla $C(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$ ja edelleen

$$y = Ce^{-x^3} + \frac{1}{3}.$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $2xy' + y = 2x^2\sqrt{x}$.

Mallivastaus: Ratkaistaan ensin homogeeninen DY

$$2xy' + y = 0 \Leftrightarrow y = Cx^{-\frac{1}{2}}.$$

Vakion variointi $y = C(x)x^{-\frac{1}{2}}$ tuottaa DY:n

$$2x(C'(x)x^{-\frac{1}{2}} - C(x)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) + C(x)x^{-\frac{1}{2}} = 2x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow C'(x) = x^2.$$

Tästä saadaan $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, joten

$$y = Cx^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{5}{2}}.$$

4. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

sarjaratkaisut alkuehdoilla $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ja alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Millä vakion λ arvoilla löytyy ratkaisu, joka on polynomifunktio? Ohje: Oleta funktion y olevan muotoa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivoi termeittäin derivaattaa y' varten ja toisen kerran y'' :a varten. Sijoita näin saadut lausekkeet differentiaaliyhtälöön, nosta/laske summausindeksejä sopivasti ja päättelä miten kerroin a_{n+2} riippuu kertoimesta a_n . Kirjoita sarjan muutama ensimmäinen termi näkyviin.

Mallivastaus: Olkoon

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

josta

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

ja

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Täten

$$y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (\lambda - 2n) a_n \right) x^n$$

Tällöin kaikilla n :n arvoilla pitää olla

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\lambda - 2n) a_n = 0,$$

josta

$$a_{n+2} = \frac{(2n - \lambda) a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Näin ollen $a_2 = \frac{-\lambda}{2 \cdot 1} a_0$, $a_3 = \frac{2-\lambda}{3 \cdot 2} a_1$, $a_4 = \frac{4-\lambda}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!} a_0$, $a_5 = \frac{6-\lambda}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} a_1$, $a_6 = \frac{8-\lambda}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)}{6!} a_0$, jne. Ryhmittelemällä parilliset ja parittomat termit erikseen saadaan

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left(1 + \frac{-\lambda}{2} x^2 + \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!} x^4 + \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)}{6!} x^6 + \dots \right) \\ &+ a_1 \left(x + \frac{2-\lambda}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} x^7 + \dots \right) \end{aligned}$$

Kaksi lineaarisesti riippumattonta ratkaisua saadaan valitsemalla esim. ensin $(a_0, a_1) = (0, 1)$ ja sitten $(a_0, a_1) = (1, 0)$. Polynomaalinen ratkaisu on mahdollinen jos $\lambda = 2M$ on parillinen luku; tällöin jommassa kummassa sarjassa termit ovat jostain rajasta alkaen nolliä.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = x e^{-y}$.

Mallivastaus: Yhtälö on separoituva:

$$\frac{dy}{dx} = x e^{-y} \Leftrightarrow e^y dy = x dx \Leftrightarrow \int e^y dy = \int x dx + C \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{2} x^2 + C,$$

josta $y = \ln(\frac{1}{2} x^2 + C)$.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = (x+1)(y+1)$

Mallivastaus: Yhtälö on separoituva.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} dy = (x+1) dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1} dy &= \int (x+1) dx + C \Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + x + C.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$|y+1| = e^{\frac{1}{2}x^2+x+C},$$

joten mikäli $y > -1$, on

$$y = -1 + e^{\frac{1}{2}x^2+x+C}.$$

Jos taas $y < -1$, on

$$y = -1 - e^{\frac{1}{2}x^2+x+C}$$

Jos $y = -1$ on vakio, ei jakaminen alussa onnistu mutta voidaan todeta että $y = -1$ on kuitenkin ratkaisu.

7. a) Myrkytyspotilaan veressä on 8 mg/l vierasta ainetta ja potilaan veren kokonaismääräksi otaksutaan 5 l. Potilaan elimistö pystyy poistamaan ainetta 0,02 mg minuutissa. Laske kuinka pian haitallisen aineen määrä on pudonnut alle turvallisen rajan 0,1 mg/l.

b) Potilaan verta kierrätetään 20 ml/min dialyysilaitteen kautta, jonka suodatin poistaa 50% haitallisesta aineesta koko ajan. Kirjoita differentiaaliyhtälö veressä olevan vieraan aineen määrälle $M(t)$ (mg), ratkaise se ja selvitä koska pitoisuus on alle turvallisen rajan.

Mallivastaus a) $M'(t) = -0,02$, josta $M(t) = -0,02t + C$, ja sijoittamalla $t = 0$ saadaan $5 \cdot 8 = 40 = C$. Turvallinen arvo merkitsee kokonaismäärää 0,5 mg ja tämän saavuttaminen voidaan selvittää yhtälöstä

$$-0,02t + 40 = 0,5 \Leftrightarrow t = \frac{39,5}{0,02} = 1975$$

(1975 min = 1 d 8 h 55 min).

b) Haitallisen aineen määrä millilitraa kohti on $M(t)/5000$, joten poistuma minuutissa on $20 \cdot \frac{M(t)}{5000} + 0,02$. Toisaalta palautuva määrä minuutissa on 50% laitteeseen poistuvasta määrästä, joten differentiaaliyhtälö on

$$M'(t) = -\frac{1}{250}M(t) - 0,02 + 0,5\frac{1}{250}M(t) \Leftrightarrow M'(t) = -\frac{1}{500}M(t) - 0,02.$$

Yhtälö on vakiokertoiminen lineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu voidaan saada luennolla esitettyyn tapaan (Laplace-muunnos tai 1. kl. lin. DY ratkaisumenetelmä):

$$M(t) = 50e^{-\frac{1}{500}t} - 10$$

Raja 0,5 saavutetaan kun

$$50e^{-\frac{1}{500}t} - 10 = 0,5,$$

mikä tapahtuu, kun

$$e^{-\frac{1}{500}t} = \frac{10,5}{50} \Leftrightarrow t \approx 780$$

(n. 13 h)

8. Ratkaise differentiaaliyhtälö $3x^2 + 2xy + 3 + (x^2 - 4y)y' = 0$. Ohje: Yhtälö on eksakti.

Mallivastaus: Koska $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy + 3) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4y)$, on yhtälö eksakti ja ratkaisua varten etsitään funktio F , jolle pätee

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 + 2xy + 3 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x^2 - 4y. \end{cases}$$

Ylemmän yhtälön perusteella $F = x^3 + x^2y + 3x + C(y)$, josta $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + C'(y)$ ja alemman yhtälön perusteella $C'(y) = -4y$ ja edelleen $C(y) = -2y^2 + C$. Differentiaaliyhtälön implisiittinen ratkaisu on täten

$$x^3 + x^2y + 3x - 2y^2 = D.$$

9. Newtonin toisen liikelain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa F on yhtäsuuri kuin kappaleen liikemäärän $p = mv$ muutosnopeus, siis $F = \frac{d}{dt}(mv)$. Jos kappaleen massa pysyy vakiona, voidaan tämä kirjoittaa muotoon $F = m \frac{d}{dt}v = ma$, mutta muuttuvan massan tapauksessa on käytettävä tulon derivointisääntöä.

Kirjoita Newtonin lain mukainen liikeyhtälö kuvaamaan tilannetta, jossa maan pinnalta lähetettävään avaruusrakettiin vaikuttavat voimat ovat ainoastaan moottorin työntövoima F sekä maan gravitaatiovoima. Oletetaan, että työntövoima F pysyy vakiona ja samalla raketin massa m vähenee tasaisesti polttoaineen huvetessa: $m = m_0 - kt$ (k kuvaa polttoaineen kulutusnopeutta).

Kirjoita yhtälö siten, että tuntematon funktio s edustaa raketin etäisyyttä maan keskipisteestä. Esitä gravitaation suuruus Newtonin gravitaatiolain mukaisessa muodossa $G \frac{Mm}{s^2}$, missä M on maan ja m on raketin massa ja s massakeskipisteiden välinen etäisyys. Yhtälöä ei tarvitse ratkaista, mutta selvitä mitä menetelmiä saadun differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi kurssilla on toistaiseksi esitetty (jos yhtään).

Mallivastaus:

$$\frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} = F - G \frac{Mm}{s^2},$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$-kv + (m_0 - kt)v' = F - G \frac{M(m_0 - kt)}{s^2}$$

ja edelleen

$$(m_0 - kt)s'' - ks' = F - G \frac{M(m_0 - kt)}{s^2}.$$

Tehtävän differentiaaliyhtälö on "rakettitiedettä" ja vaikea ratkaista. Kurssilla ei ole esitetty suoria menetelmiä sen ratkaisemiseksi.

DY voidaan kirjoittaa muotoon

$$s'' - \frac{c}{m_0 - kt}s' = \frac{F}{m_0 - kt} - \frac{GM}{s^2},$$

ja tästä linearisoitu DY

$$s'' - \frac{k}{m_0 - kt}s' = \frac{F}{m_0 - kt}$$

osataan ratkaista kurssilla esitetyillä menetelmillä, kun sijoitetaan $s' = v$, josta $s'' = v'$. Kun linearisoidulle versiolle on löydetty jokin ratkaisu s_L , voidaan alkuperäisen DY:n ratkaisua yrittää etsiä jollakin funktion s_L sisältävällä yritteellä, mutta tämä ei kuitenkaan takaa ratkaisun löytymistä.