

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 3, 7.3.2023

1. Esitä yleinen ratkaisu seuraavalle DY-parille ja sellainen ratkaisu, jolle $x(0) = 1$ ja $y(0) = 2$.

$$\begin{cases} x' &= 5x - 12y \\ y' &= 2x - 5y \end{cases}$$

2. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= 5x - 12y + 2t^2 \\ y' &= 2x - 5y + e^{-t} \end{cases}$$

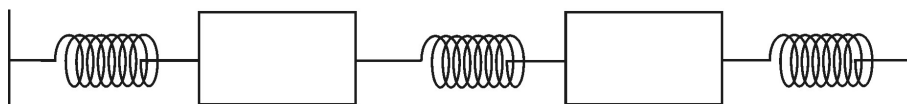
3. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= -4x + 9y \\ y' &= -x + 2y \end{cases}$$

4. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= 6y + t \\ y' &= -x + 5y + 3e^t \end{cases}$$

5. Kurssilla on esitetty useita menetelmiä lineaaristen, vakiokertoimisten epähomogeenisten DY-ryhmien ratkaisemiseksi. Etsi tehtävälle 4 yksittäisratkaisu käyttämällä jotain toista tapaa.
6. Kolme joustaa ja kaksi massaa on kytketty kuvion osoittamalla tavalla. Etäisyydet on valittu siten, että lepotilassa systeemin jousista ei yksikään ole jännittynyt.



Hooken lain mukaan jousen aiheuttama voima siihen kiinnitettyyn kappaleeseen on $F = -k\Delta x$, missä Δx on jousen poikkeama tasapainoasemastaan ja k jousivakio. Merkitään ensimmäisen massan poikkeamaa lepoasemasta x :llä ja toisen y :llä ja valitaan oikeanpuoleinen suunta positiiviseksi. Kirjoita Newtonin lain mukaiset liikeyhtälöt x :lle ja y :lle, kun jousivakiot vasemmalta oikealle ovat k_1 ja k_2 ja k_3 sekä massat m_1 ja m_2 . Yhtälöitä ei tarvitse ratkaista.

Ohje: Oletetaan, että massan m_1 paikka (=poikkeama tasapainotilasta) on x . Tällöin kuvion vasemmanpuolimmaisoin jousi kohdistaa massaan voiman $-k_1x$. Määritä toinenkin voima joka massa m_1 kohdistuu, olettaen että massan m_2 poikkeama tasapainotilasta on y . Huomioi, että x'' edustaa kiihtyvyyttä, joten Newtonin mekaniikan mukaan m_1x'' on massa m_1 vaikuttavien kokonaisvoimien summa. Määritä m_2y'' samalla periaatteella.

7. Olkoon x syöte ja y tuloste, joille pätee differentiaaliyhtälö

$$y'' - y = 2x' - x.$$

Määritä systeemin siirtofunktio. Ohje: Luentoruudut

8. Onko edellisen tehtävän systeemi stabiili? Ohje: Stabiilisuus määräytyy siirtofunktion napojen mukaan, kts. luentoruudut.
9. Selvitä onko differentiaaliyhtälön

$$y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = x' - x$$

määrittämä systeemi stabiili.