

# Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

## Demonstraatio 4, 14.3.2023

1. Määritä jonolle  $x_n = na^n$   $Z$ -muunnos. Ohje: Hyödynnä ensin muunnos jonolle  $a^n$  (luennoilla) ja kokeile derivointia  $z$ :n suhteen.
2. Oletetaan, että syötejono  $x_n$  (input) ja tulostejono  $y_n$  (output) toteuttavat yhtälön

$$y_{n+1} + 2y_n = x_n.$$

Onko systeemi stabiili? Jos ei, millainen rajoitettu syöte voisi tuottaa rajoittamattoman tulosteen?

3. Muunna DY-ryhmä

$$\begin{cases} x'' &= 2y'y + 5z^2 \\ y'' &= (x')^2 - 3y'z \end{cases}$$

sellaiseksi DY-ryhmäksi, jossa vasemmalla puolella esiintyy vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja ja oikealla puolella ei esiinny derivaattoja ollenkaan. Ohje: Määrittele uusia funktioita tunnettujen funktioiden avulla ja kasvata yhtälöiden määrää.

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Ohje: Sijoita  $z = \frac{y}{x}$ .

5. Muunna differentiaaliyhtälö  $y' = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$  separoituvaksi sijoituksella  $z = \frac{y}{x}$ .

6. Muunna differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{-x - y - 1}{2x + 2y + 3}.$$

separoituvaksi sijoituksella  $z = x + y$ .

7. Muunna sopivalla sijoituksella Bernoullin differentiaaliyhtälö  $y' - y = \frac{x^2}{y}$  lineaariseksi.
8. Muunna sopivalla sijoituksella Bernoullin differentiaaliyhtälö  $y' - y = xy^3$  lineaariseksi.
9. Sijoita differentiaaliyhtälöön

$$y' = -y^2 + xy + 1$$

$y = x + \frac{1}{z}$ , missä  $z$  on uusi funktio. Millainen uusi differentiaaliyhtälö on?