

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Määritelmä

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

missä F on lauseke, joka sisältää muuttujan t , tuntemattoman funktion $y = y(t)$ sekä tämän yhden- tai useammankertaisia derivaattoja $y', y'' \dots, y^{(n)}$. Lukua n kutsutaan differentiaaliyhtälön *kertaluvuksi*.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälön ratkaisun kuvaajaa kutsutaan *integraalikäyräksi*. Yleensä integraalikäyriä on ääretön määrä, mutta yksikäsitteiseen ratkaisuun voidaan päätyä *reunaehdoilla* $y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n)}(0) = c_n$.

Määritelmä

Muotoa

$$y^{(n)}(t) = f(t)$$

oleva differentiaaliyhtälö on yksinkertainen. Yksinkertaisen DY:n ratkaiseminen on integrointitehtävä.

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.
- Kappaleen nopeus on $v(t) = s'(t)$.
- Kappaleen kiihtyvyys on $a(t) = v'(t)$.
- Tasaisesti kiihtyvä liike: $a(t) = a$ (vakio).
- Tällöin $s''(t) = v'(t) = a(t) = a$.

Esimerkki

Radioaktiivisen hajoamisen DY

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

ei ole yksinkertainen, mutta sen ekvivalentti muoto

$$\frac{d}{dt} \ln N(t) = -\lambda$$

on.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

on lineaarinen. Jos funktiot $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ ja a_0 ovat vakioita, sanotaan yhtälöä vakiokertoimiseksi. Jos $b(t)$ on nollafunktio, sanotaan yhtälöä homogeeniseksi.

Määritelmä

C^n on n kertaa derivoituvien funktioiden joukko. $C^n[a, b]$ on välillä $[a, b]$ määriteltyjen, n kertaa derivoituvien funktioiden joukko.

Lause

Homogeenisen DY:n ratkaisut muodostavat C^n :n aliavaruuden

Lause

Jos funktiot a_i ovat jatkuvia, on homogeenisella DY:llä

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua $y_1, \dots, y_n$ ja yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaationa:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Lause

Jos funktiot a_i ja b ovat jatkuvia, ovat epähomogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

kaikki ratkaisut muotoa

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_0,$$

missä $y_1, \dots, y_n$ ovat homogeenisen DY:n riippumattomat ratkaisut ja y_0 epähomogeenisen DY:n yksittäisratkaisu.

Vertaa:

Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kaikki ratkaisut ovat muotoa $c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_0$, missä $\mathbf{x}_i$ ovat homogeenisen ryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ riippumattomat ratkaisut ja $\mathbf{x}_0$ alkuperäisen ryhmän yksittäisratkaisu.

Määritelmä

Ääretön vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton jos sen jokainen osajoukko on.

Lause

Joukko $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ on lineaarisesti riippumaton

Lause

Joukko $\{e^{\lambda t} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Huomautus

Vakiokertoimisen homogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ratkaisuja voidaan löytää yritteellä $y = e^{\lambda t}$: Tällöin $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$ ja sijoittamalla saadaan

$$a_n \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

ja jakamalla $e^{\lambda t}$ pois

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Algebran peruslauseen mukaan tällä *karakteristisella yhtälöllä* on ratkaisu.

Lause

Jos λ_j on karakteristisen yhtälön j -kertainen juuri, on vakiokertoimisella homogeenisella DY:llä lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{j-1} e^{\lambda_j t}.$$

Huomautus

Jos karakteristisella polynomilla on kompleksinen juuri λ , on myös tämän liittoluku $\bar{\lambda}$ myös ratkaisu. Jos halutaan pidättäytyä reaalisisissa ratkaisuiissa, merkitään $\lambda = \alpha + i\beta$ ja ratkaisut $e^{\lambda t}$ ja $e^{\bar{\lambda} t}$ voidaan korvata reaalisisilla ratkaisuisilla $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ja $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Epähomogeeninen DY

Epähomogeeninen, vakiokertoiminen DY

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

voidaan ratkaista seuraavasti:

- Etsitään kaikki homogeenisen DY:n ratkaisut $y_1, \dots, y_n$ yritteellä $y = e^{\lambda t}$.
- Etsitään epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu y_0 yritteellä kokeilemalla tai Laplace-muunnosten avulla.
- Kaikki ratkaisut ovat tällöin muotoa $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_0$.

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön

$$y' + a(x)y = 0$$

ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H .
- Vakion variointi: Sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen DY:hyn ja ratkaistaan $C(x)$.

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.