

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Epähomogeeninen DY

Epähomogeeninen, vakiokertoiminen DY

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

voidaan ratkaista seuraavasti:

- Etsitään kaikki homogeenisen DY:n ratkaisut $y_1, \dots, y_n$ yritteellä $y = e^{\lambda t}$.
- Etsitään epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu y_0 yritteellä kokeilemalla tai Laplace-muunnosten avulla.
- Kaikki ratkaisut ovat tällöin muotoa $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_0$.

Yksittäisratkaisun etsiminen yrittäällä

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

- Jos $b(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $b(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos b on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos b on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

Esimerkki

Etsitään DY:n $y' + y = e^{-t}$ kaikki ratkaisut. Aloitetaan homogeenisen yhtälön $y' + y = 0$ ratkaisuista, jotka saadaan sijoittamalla $y = e^{\lambda t}$. Näin ollen $\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$, josta $\lambda = -1$. Homogeenisen yhtälön ratkaisut ovat täten muotoa $y = ce^{-t}$, ja yksittäisratkaisun löytämiseksi valitaan yrite $y = Ae^{-t}$. Koska tämä on homogeenisen yhtälön ratkaisu, muutetaan yrite muotoon $y = Ate^{-t}$. Tällöin

$$y' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

ja sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$Ae^{-t} - Ate^{-t} + Ate^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow A = 1.$$

Näin ollen yleinen ratkaisu on $y = ce^{-t} + te^{-t}$.

Esimerki

- $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$
- $y'' + 3y' + 2y = \sin x$
- $y'' + 3y' + 2y = \sinh x$

Laplacen integraali

Funktion f Laplace-muunnos määritellään

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Muotoa

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

olevaa integraalia sanotaan Laplacen integraaliksi.

Määritelmä

Olkoon $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä vain äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos integraali

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

suppenee jollain s :n arvolla, sanotaan, että f on originaalifunktio ja että sen Laplace-muunnos $F(s)$ on kuvaafunktio. Lisäksi merkitään $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

Ominaisuudet

- Lineaarisuus: $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.
- Muuttujan skaalaus: $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$.
- Kertominen eksponenttifunktiolla:
 $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - a)$.
- Kuvafunktion derivointi: $F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s)$.
- Originaalifunktion derivointi: $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+)$,
missä $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.
- Derivointisäännön yleistys: Jos funktiolla $f^{(n)}$ on Laplace-muunnos, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n \mathcal{L}[f](s) \\ &\quad - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).\end{aligned}$$

Ominaisuudet

- Originaalifunktion integrointi: Jos f on originaalifunktio, on myös

$$g(t) = \int_0^t f(u) du$$

ja

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

Konvoluutio

Määritellään

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

Lause

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * (ah + bg) = af * h + bf * g$, ja
- $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$.

Lause

Jos $F(s)$ on kuvafunktio, on $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

Lause

Jos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, on

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

jos $t > 0$ ja x on suurempi kuin funktion f kasvueksponentti.
Ylläoleva integraali tunnetaan nimellä Bromwichin integraali.

Lause

Jos f_1 ja f_2 ovat jatkuvia joukossa $[0, \infty)$ ja $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$, niin $f_1(t) = f_2(t)$, kun $t \in [0, \infty)$.

Laplace-muunnoksilla

Jos etsitään ratkaisua, jolle $y(0) = 0$, saadaan

$$y' + y = e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow sY + Y = \frac{1}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Tästä saadaan (taulukon rivi 22)

$$y = te^{-t}$$

Esimerkki

$$\begin{aligned} & 2x + 1 + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+1} \\ = & \frac{(2x+1)(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)} + \frac{(x+1)}{(x+2)(x+1)} - \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ = & \frac{2x^3 + 7x^2 + 6x - 1}{x^2 + 3x + 2} \end{aligned}$$

Hajotelma toisinpäin

$$\frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 1} = ?$$

"Määritelmä"

Rationaalilausekkeen $\frac{p(x)}{q(x)}$ osamurtohajotelma on esitys

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \dots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)},$$

missä $a(x)$ on polynomi, $\deg(p_i) < \deg(q_i)$ ja $\deg(q_i)$ on mahdollisimman pieni.

Esimerkki

Jakokulmassa jakamalla saadaan

$$\frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 1} = x^2 - 3x + 11 + \frac{-31x - 10}{x^2 + 3x + 1}.$$

Näin saatu hajotelma ei ole kaikkiin tarkoituksiin paras mahdollinen, sillä osoittaja on vielä astetta 1.

Osoittajan asteen vähentäminen

Osoittautuu, että osoittajien astetta voidaan vähentää jakamalla nimittäjä tekijöihin. Samalla summattavien määrä kasvaa.

Lause

Jos $\deg q \leq \deg(p)$ ja $q \neq 0$, saadaan jakokulmassa

$$p = aq + r,$$

missä a on osamäärä, r jakojäännös ja $\deg(r) < \deg(q)$.

Määritelmä

Polynomi p on *jaollinen* polynomilla q , tai q *jakaa* $p:n$ tai q *on* $p:n$ *tekijä*, merkitään $q \mid p$, mikäli $p = aq$ jollekin polynomille a .

$$z - 1 \overline{) z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$$

$$z - 1 \overline{) \begin{array}{r} z^3 \\ -4z^2 \\ +5z \\ -2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} z^2 \\ z-1 \overline{) z^3 - 4z^2 + 5z - 2} \\ \underline{z^3 - z^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z^2 \\ z-1 \overline{) z^3 - 4z^2 + 5z - 2} \\ \underline{z^3 - z^2} \\ -3z^2 + 5z - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} z^2 \quad -3z \\ z-1 \overline{) z^3 - 4z^2 + 5z - 2} \\ \underline{z^3 \quad -z^2} \\ -3z^2 + 5z - 2 \end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$\begin{array}{r|rrrr} & z^2 & -3z & & \\ z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\ & z^3 & -z^2 & & \\ \hline & & -3z^2 & +5z & -2 \\ & & -3z^2 & +3z & \end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$\begin{array}{r} z^2 - 3z \\ z - 1 \overline{) z^3 - 4z^2 + 5z - 2} \\ \underline{z^3 - z^2} \\ -3z^2 + 5z - 2 \\ \underline{-3z^2 + 3z} \\ 2z - 2 \end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$\begin{array}{r|rrrr} z-1 & z^2 & -3z & +2 & \\ & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\ & z^3 & -z^2 & & \\ \hline & & -3z^2 & +5z & -2 \\ & & -3z^2 & +3z & \\ \hline & & & 2z & -2 \end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$\begin{array}{r|rrrr} & z^2 & -3z & +2 & \\ z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\ & z^3 & -z^2 & & \\ \hline & & -3z^2 & +5z & -2 \\ & & -3z^2 & +3z & \\ \hline & & & 2z & -2 \\ & & & 2z & -2 \end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$\begin{array}{r} z-1 \overline{) \begin{array}{rrrr} z^2 & -3z & +2 & \\ z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\ \hline z^3 & -z^2 & & \\ \hline & -3z^2 & +5z & -2 \\ & -3z^2 & +3z & \\ \hline & & 2z & -2 \\ & & 2z & -2 \\ \hline & & & 0 \end{array}} \end{array}$$

Esimerkki

- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, joten $(x - 1) \mid (x^2 - 1)$ ja $(x + 1) \mid (x^2 - 1)$
- $x^2 - 1 = 2(x + 1) \cdot \frac{1}{2}(x - 1)$, joten myös $2(x + 1) \mid (x^2 - 1)$ ja $\frac{1}{2}(x + 1) \mid (x^2 - 1)$
- Jos $p \mid q$, ja $c \neq 0$ vakio, on $q = pr = cp \cdot c^{-1}r$. Täten myös $cp \mid q$. Ei toimi, jos c ei ole vakio.
- Sanotaan, että polynomit $p(x)$ ja $cp(x)$ ovat *liitännäiset*, jos $c \neq 0$.

Suurin yhteinen tekijä

Määritelmä

Polynomien p ja q suurin yhteinen tekijä $d = \gcd(p, q)$ on polynomi, joka toteuttaa

- $d \mid p$ ja $d \mid q$
- d on jaollisuusrelaation suhteen maksimaalinen ylläolevat ehdot toteuttava.

Huomautus

Polynomien suurin yhteinen tekijä ei ole yksikäsitteisesti määrätty polynomi, vaan luokka toisilleen liitännäisiä polynomeja: Jos $d(x)$ toteuttaa yllämainitut ehdot, myös $cd(x)$, missä $c \neq 0$ toteuttaa ne.

Esimerkkejä

- $\gcd((x-2)(x-5), (x-1)(x+3)(x+2)) = 1$
- $\gcd((x-2)(x-5), (x-1)(x+3)(x-2)) = x-2$
- $\gcd((x-2)^4(x-1)(x+2), (x-2)(x-1)^3(x+3)) = (x-2)(x-1)$

Huomautus

Koska kaikki vakiopolynomit $c \neq 0$ ovat liitännäisiä 1:n kanssa, tarkoittaa $\gcd(p, q) = 1$ sitä, että polynomeilla p ja q on yhteisenä tekijänä vain vakio.

Määritelmä

Polynomi p on jaoton, jos kaikki sen tekijät ovat liitännäisiä joko p :n tai vakiopolynomin 1 kanssa.

Esimerkki

Polynomilla $x^2 + 1$ voi asteensa puolesta olla vain 0., 1., tai 2. asteen tekijä. 2. asteen tekijä on liitännäinen $x^2 + 1$ kanssa ja 0. asteen tekijä vakiopolynomin 1 kanssa. 1 asteen tekijää $x - c \in \mathbb{R}[x]$ ei ole, koska polynomilla $x^2 + 1$ ei ole reaalista nollakohtaa c . Näin ollen $x^2 + 1$ on jaoton joukossa $\mathbb{R}[x]$.

Esimerkki

$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, joten $x^2 + 1$ ei ole jaoton joukossa $\mathbb{C}[x]$.

Seuraus algebran peruslauseesta

Jokainen polynomi jakautuu $\mathbb{C}[x]$:ssä ensimmäisen asteen tekijöihin:

$$P(x) = a(x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n)$$

Huomautus

Hajotelman löytäminen on usein hankalaa $\leftrightarrow$ nollakohtien löytäminen hankalaa. Sen sijaan $\gcd(p, q)$ voidaan aina löytää suoraviivaisesti.

Lause

Olkoon $p \in \mathbb{R}[z]$. Jos $p(z) = 0$, niin myös $p(\bar{z}) = 0$.

Todistus

Käytetään kompleksikonjugaatin ominaisuuksia $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ja $\bar{\bar{z}} = z$, jos $z \in \mathbb{R}$.

Jos $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, missä $c_i \in \mathbb{R}$, ja $P(z) = 0$, on myös

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0} \\ &= \overline{c_n z^n} + \overline{c_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{c_1 z} + \overline{c_0} \\ &= c_n \bar{z}^n + c_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + c_1 \bar{z} + c_0 \\ &= P(\bar{z}) \end{aligned}$$

Lause

$$(z - c)(z - \bar{c}) \in \mathbb{R}[z]$$

Todistus

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c},$$

$$c + \bar{c} = 2 \operatorname{Re}(c) \in \mathbb{R} \text{ sekä } c\bar{c} = |c|^2 \in \mathbb{R}.$$

Lause

Jokainen polynomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ jakautuu joukossa $\mathbb{R}[x]$ tekijöihin, joiden aste on korkeintaan 2.

Todistus

Kompleksilukujen joukossa $p(x)$:n tiedetään jakautuvan 1. asteen tekijöihin:

$$p(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n).$$

Jos $c_i \notin \mathbb{R}$, esiintyy myös $\overline{c_i}$ nollakohtien joukossa (koska $p(x) \in \mathbb{R}[x]$). Jaotellaan siis nollakohdat $c_1, \dots, c_n$ jonoon $r_1, \dots, r_k, w_1, \overline{w_1}, \dots, w_l, \overline{w_l}$. Tällöin

$$p(x) = a(x - r_1) \dots (x - r_k) \cdot \underbrace{(x - w_1)(x - \overline{w_1})}_{\in \mathbb{R}[x]} \dots \underbrace{(x - w_l)(x - \overline{w_l})}_{\in \mathbb{R}[x]}.$$