

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Lause (Tyypin I hajotelma)

Olkoon $\deg(p) \leq \deg(q)$. Jos $q \neq 0$ voidaan jakaa tekijöihin $q = q_1 q_2$, joille $\gcd(q_1, q_2) = 1$, on olemassa sellaiset yksikäsitteiset polynomit p_1 ja p_2 , että

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$$

ja $\deg(p_i) < \deg(q_i)$.

Lause (Tyypin II hajotelma)

Olkoon $\deg(p) \leq \deg(q^n)$ ja $q \neq 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset polynomit $p_1, \dots, p_n$, joille

$$\frac{p}{q^n} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \dots + \frac{p_n}{q^n},$$

ja $\deg(p_i) < \deg(q)$.

Yhteenveto

- Suorita jakolasku $\frac{p}{q} = a + \frac{r}{q}$, jonka jälkeen $\deg(r) < \deg(q)$.
- Jos nimittäjä q voidaan jakaa tekijöihin $q = q_1 q_2$, missä $\gcd(q_1, q_2) = 1$, etsi polynomit p_i ($\deg(p_i) < \deg(q_i)$) joille

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$$

- Jos nimittäjää ei voi jakaa tekijöihin, joiden $\gcd = 1$, mutta on muotoa q^n , etsi polynomit $p_1, p_2, \dots, p_n$ ($\deg(p_i) < \deg(q)$) joille

$$\frac{p}{q^n} = \frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \dots + \frac{p_n}{q^n}.$$

Polynomien p_i etsiminen

- Määräämättömät kertoimet $\Rightarrow$ Lineaarinen yhtälöryhmä $\Rightarrow$ Gaussin-Jordanin menetelmä

Esimerkkejä (vuoden 2018 moniste)

- Esimerkki 130
- Esimerkki 131
- Esimerkki 132
- **Esimerkki 133**
- Esimerkki 134
-

$$\frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 1} = ?$$

Esimerkki

$$y'' + y' - 2 = 0,$$

missä $y(0) = y'(0) = 1$. Laplace-muunnoksilla

$$s^2 Y - s - 1 + sY - 1 - 2\frac{1}{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + s)Y = \frac{2}{s} + 2 + s$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow Y &= \frac{2}{s(s^2 + s)} + \frac{2}{s^2 + s} + \frac{s}{s^2 + s} \\ &= \frac{2}{s^2(s + 1)} + \frac{2}{s^2 + s} + \frac{1}{s + 1}\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(s+1)} &= \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+1} \\ &= \frac{(As+B)(s+1) + Cs^2}{s^2(s+1)} = \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B}{s^2(s+1)}\end{aligned}$$

Näin ollen $A + C = 0$, $A + B = 0$ ja $B = 1$, josta $A = -1$ ja $C = 1$. Täten

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisut ovat muotoa $y = Cy_1 + y_0$, missä y_1 on homogeenisen yhtälön

$$y' + a(x)y = 0$$

ratkaisu $\neq 0$ ja y_0 on jokin alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Ratkaisumenetelmä

- Homogeenisen yhtälön ratkaisu y_H .
- Vakion variointi: Sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen DY:hyn ja ratkaistaan $C(x)$.

2. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

- Esiintyvät erityisesti fysiikassa (klassinen ja kvanttifysiikka)
- Ei yleistä integrointiin perustuvaa ratkaisumenetelmää
- Erikoistapauksia tutkittu kauan
- Useita ratkeavia erikoistapauksia

Lause

Jos homogeeniselle DY:lle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tunnetaan yksikin ratkaisu, voidaan kaikki alkuperäisen DY:n ratkaisut selvittää.