

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

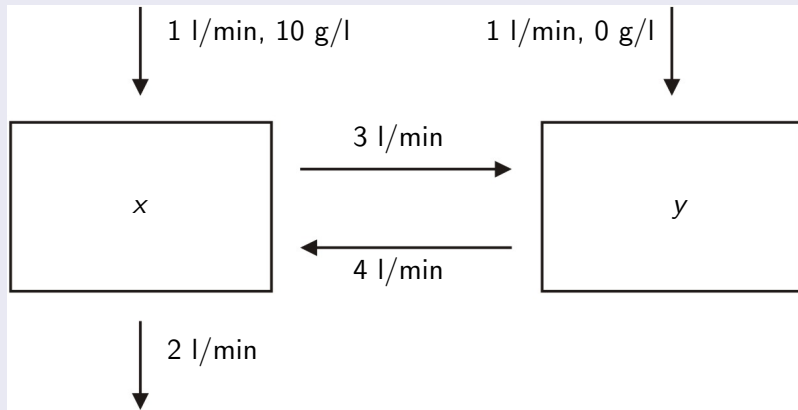
2023

Yhteenveto

- Homogeenisen DY-ryhmän $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ratkaisu on $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$.
- Etsitään matriisin A (yleistetyt) ominaisvektorit jotka muodostavat kannan. Tällöin voidaan esittää
$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$
- $e^{tA}\mathbf{v}_i$ voidaan laskea esityksen
$$e^{tA}\mathbf{v}_i = e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\mathbf{v}_i = e^{\lambda t} e^{t(A - \lambda I)}\mathbf{v}_i$$
 perusteella.
- Kertoimet $c_1, \dots, c_n$ määräytyvät ehdon $\mathbf{c} = \mathbf{x}(0)$ perusteella.

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Esimerkki

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} + 10 \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$

Homogeenisoitu DY-pari:

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{ -\frac{2}{5}, -\frac{1}{20} \right\}$$

Matriisin A ominaisvektorit

$$(A + \frac{2}{5}I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + \frac{1}{20}I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu

Yrite:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

(vakiovektori), jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yksittäisratkaisu

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Alkuehdoista saadaan

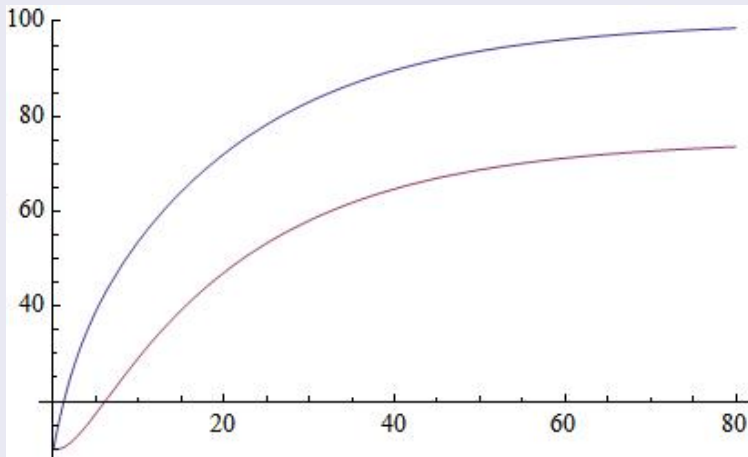
$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

josta $(c_1, c_2) = (\frac{75}{7}, -\frac{530}{7})$.

Ratkaisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{75}{5} e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{530}{7} e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix},$$

Esimerkki



Epähomogeeninen tapaus

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Tähän voidaan soveltaa vakion variointia: Homogeenisen ryhmän ratkaisu $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$ tunnetaan, joten käytetään yritettä $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}(t)$, jolloin

$$\mathbf{x}' = Ae^{tA}\mathbf{c}(t) + e^{tA}\mathbf{c}'(t).$$

Sijoittamalla tämä epähomogeeniseen yhtälöön saadaan

$$Ae^{tA}\mathbf{c}(t) + e^{tA}\mathbf{c}'(t) = Ae^{tA}\mathbf{c}(t) + \mathbf{f},$$

mikä sievenee muotoon

$$e^{tA}\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{c}'(t) = e^{-tA}\mathbf{f}.$$

Epähomogeeninen DY-ryhmä

- Täten $\mathbf{c}(t) = \int e^{-tA} \mathbf{f} dt + \mathbf{c}$ ja
- $\mathbf{x} = e^{tA} \int e^{-tA} \mathbf{f} dt + e^{tA} \mathbf{c}.$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovat matriisin A ominaisvektorit.
Tällöin

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= e^{tA}(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) \\
 &= c_1 e^{-\frac{2}{5}t} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{2}{5}t}(-\frac{4}{3}) + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \\ c_1 e^{-\frac{2}{5}t} + c_2 e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}e^{-\frac{2}{5}t} & e^{-\frac{1}{20}t} \\ e^{-\frac{2}{5}t} & e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix}}_{X(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = X(t)\mathbf{c}
 \end{aligned}$$

Huomautus:

Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$A = P \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ja

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{5}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{3}{7}e^{-\frac{1}{20}t} & -\frac{4}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{4}{7}e^{-\frac{1}{20}t} \\ -\frac{3}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{3}{7}e^{-\frac{1}{20}t} & \frac{3}{7}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{4}{7}e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \neq X(t) \end{aligned}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu

Suoraan laskemalla voidaan todeta, että

$$\frac{d}{dt}X(t)\mathbf{c} = AX(t)\mathbf{c},$$

siis $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}$ on homogeenisen DY:n ratkaisu

Yksittäisratkaisu

- Epähomogeenista DY-ryhmää $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ varten pitää löytää yksittäisratkaisu.
- Yksittäisratkaisun löytämiseen voidaan soveltaa vakion variointia: Jos homogeenisen ryhmän ratkaisu $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}$ on tiedossa, käytetään yritettä $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}(t)$, mikä johtaa DY-ryhmään $X(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{c}'(t) = X^{-1}(t)\mathbf{f}$.
- Näin ollen $\mathbf{c}(t) = \int X^{-1}(t)\mathbf{f} dt + \mathbf{c}$ ja
- $\mathbf{x} = X(t) \int X^{-1}(t)\mathbf{f} dt + X(t)\mathbf{c}$.
- Määräämätön integraali lasketaan jokaiselle koordinaatille erikseen.

Esimerkki

DY-parin

$$\begin{cases} x' &= -5 \cdot \frac{x}{20} + 4 \cdot \frac{y}{20} \\ y' &= 3 \cdot \frac{x}{20} - 4 \cdot \frac{y}{20} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogenisoidulle versiolle on saatu ratkaisu $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}$, vakion variointi $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}(t)$ johtaa yhtälöön

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= X^{-1}(t) \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}e^{\frac{2}{5}t} & \frac{3}{7}e^{\frac{2}{5}t} \\ \frac{3}{7}e^{\frac{1}{20}t} & \frac{4}{7}e^{\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{30}{7}e^{\frac{2}{5}t} \\ \frac{30}{7}e^{\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki

Tästä saadaan

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{150}{14}e^{\frac{2}{5}t} \\ \frac{3}{14}e^{\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ja edelleen ratkaisuna $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}(t)$.

Laplace-muunnokset

Vakiokertoimisen lineaarisen DY-ryhmän

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

Laplace-muunnos: $s\mathbf{X} - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X} + B\mathbf{U}$, josta muodollisesti

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s)$$

Käänteismuunnos:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-u)B\mathbf{u}(u) du,$$

missä $\Phi(t) = e^{tA}$.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriisin ominaisarvot ovat -8 ja -2 , sekä näitä vastaavat ominaisvektorit $(1, 1)$ ja $(-2, 1)$. Yleinen ratkaisu on siis

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = C_1 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Derivaattaoperaattori

Merkitään $D = \frac{d}{dx}$, jolloin $y' = Dy$, $y'' = D^2y$, $y''' = D^3y$, jne.

Esim. $(D + 1)(3D - 2)y = (3D^2 + D - 2)y = 3y'' + y' - 2y$

Esimerkki

DY-pari

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 2x - 2y + 3e^t \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} (D - 3)x + 2y = t \\ -2x + (D + 2)y = 3e^t \end{cases}$$

Kertomalla ylempi luvulla 2 ja alempi operaattorilla $D - 3$ saadaan

$$\begin{cases} 2(D - 3)x + 4y = 2t \\ (D - 3)(-2x) + (D - 3)(D + 2)y = (D - 3)3e^t, \end{cases}$$

josta $(D^2 - D - 2)y = 2t - 6e^t$.

Esimerkki

Operaattoriyhtälö $(D^2 - D - 2)y = 2t - 6e^t$ tarkoittaa tavallista differentiaaliyhtälöä

$$y'' - y' - 2y = 2t - 6e^t,$$

jonka yksittäisratkaisu voidaan löytää Laplace-muunnoksilla:

$$y = \frac{1}{2} - t + 3e^t$$

Funktio x saadaan sijoittamalla tämä ylempään DY:hyn.

Lähtökohta

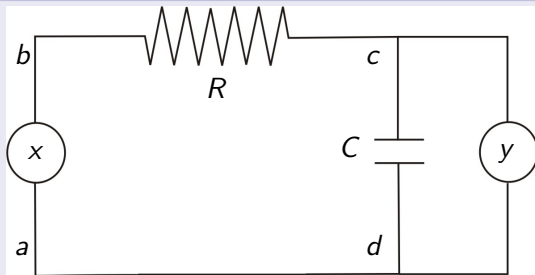
- Syöte $\mathbf{x}(t)$
- Tuloste $\mathbf{y}(t) = \mathcal{S}(\mathbf{x}(t))$
- Lineaarisuus

$$\mathcal{S}(a_1 \mathbf{x}_1(t) + a_2 \mathbf{x}_2(t)) = a_1 \mathcal{S}(\mathbf{x}_1(t)) + a_2 \mathcal{S}(\mathbf{x}_2(t)).$$

Mahdollisia malleja

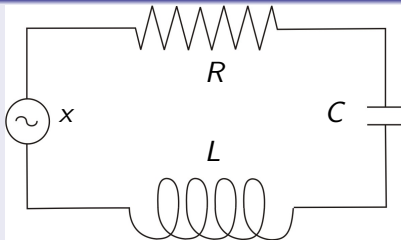
- $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, missä $\mathbf{A}$ on vakiomatriisi.
- Muuttuvatilainen systeemi, jossa tilavektori $\mathbf{s}$ toteuttaa yhtälön $\mathbf{s}' = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{B}\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{D}\mathbf{x}$.

Esimerkki



$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$$

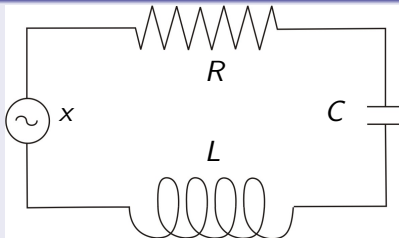
Esimerkki



Merkitään piirissä kulkevaa sähkövirtaa symbolilla $y = I$. Tällöin $x = RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt}$ ja

$$x' = RI' + \frac{1}{C}I + L\frac{d^2I}{dt^2} = Ry' + \frac{1}{C}y + Ly''$$

Esimerkki



Jos taas kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y , on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy''$$

Määritelmä

Jos lineaarisen järjestelmän määrittää lineaarinen DY

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + b_0x.$$

on järjestelmän *siirtofunktio* on $G(s) = Y(s)/X(s)$, missä

Laplace-muunnokset on laskettu oletuksilla

$$0 = x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots$$

Yllä olevasta yhtälöstä saadaan näillä oletuksilla

$$s^n Y + a_{n-1}s^{n-1}Y + \dots + a_0Y = s^m X + b_{m-1}s^{m-1}X + \dots + b_0X,$$

josta

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)Y = (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)X$$

Siirtofunktio

Jos järjestelmää voidaan kuvata vakio kertoimisilla lineaarisilla differentiaaliyhtälöillä, on siirtofunktio $G(s)$ seuraavaa muotoa:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}}_{G(s)} X(s)$$

Määritelmä

Lineaarinen järjestelmä on *stabiili*, jos syötteen $x(t)$ ollessa rajoitettu on tuloste $y(t)$ (output) myös rajoitettu. Toisin sanoen: $|x(t)| \leq M_1 \rightarrow |y(t)| \leq M_2$.

Kriteeri

Jos $Y(s) = G(s)X(s)$, $y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$, $g = \mathcal{L}^{-1}[G]$ ja $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X]$, on

$$y(t) = (g * x)(t) = \int_0^t g(u)x(t-u) du$$

Kriteeri

Jos $|x(t)| \leq M_1$, on

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t g(u)x(t-u) du \right| \\ &\leq \int_0^t |g(u)x(t-u)| du \leq \int_0^t |g(u)| M_1 du \\ &= M_1 \int_0^t |g(u)| du \leq M_1 \int_0^\infty |g(u)| du \end{aligned}$$

Jos

$$\int_0^\infty |g(u)| du < \infty,$$

on myös $y(t)$ rajoitettu. Voidaan osoittaa, että tämä on myös välttämätön ehto.

Impulssivaste

Impulssivaste tarkoittaa järjestelmän tulostetta kun syötteenä on Diracin delta-funktio. Syötteen ollessa $x(t) = \delta(t)$ saadaan $y(t) = (g * \delta)(t) = g(t)$.

Johtopäätös

Lineaarinen järjestelmä on stabiili tarkalleen silloin sen impulssivasteelle $g(t)$ pätee

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Askelvaste

Askelvaste tarkoittaa tulostetta, kun syötteenä on Heavisiden askelfunktio:

$$y(t) = (g * H)(t) = \int_0^t g(u)H(t-u) du = \int_0^t g(u) du.$$

Näin ollen impulssivaste on askelvasteen derivaatta.

Siirtofunktion hajotelma

Koska siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

on rationaalifunktio, on sillä olemassa osamurtohajotelma

$$G(s) = a(s) + \frac{p(s)}{q(s)},$$

missä a on polynomi ja $\deg(p) < \deg(q)$. Käänteismuunnos $g(t)$ saadaan osamurtohajotelmasta.

Polynomien käänteismuunnos

Koska

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = 1,$$

on $\mathcal{L}[\delta'(t)](s) = s$, $\mathcal{L}[\delta''(t)](s) = s^2$, jne.

Näin ollen polynomien käänteiset Laplace-muunnokset sisältävät delta-piikin derivaattoja eivätkä näiden integraalit ole rajoitettuja.

Käänteismuunnos

Jos $\deg(p) < \deg(q)$, on

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{c, \lambda, k} \frac{c}{(s - \lambda)^k},$$

missä $c, \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - \lambda)^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t}$$

Huomautus

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, on

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

jonka itseisarvo kasvaa rajatta, jos $\alpha > 0$, mutta lähestyy nopeasti kohti nollaa, jos $\alpha < 0$. Tämän vuoksi integraali

$$\int_0^{\infty} t^{k-1} e^{\lambda} dt$$

suppenee tarkalleen silloin kun $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

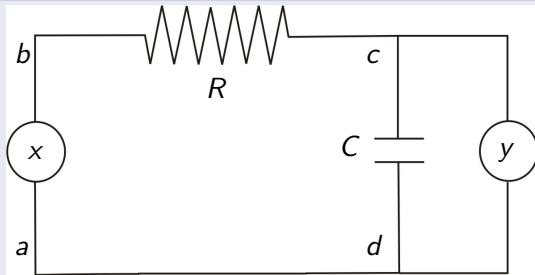
Määritelmä

Jos siirtofunktio $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ on rationaalinen ja supistettu siihen muotoon, että osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteisiä nollakohtia, sanotaan nimittäjän nollakohtia *navoiksi*

Johtopäätös

Lineaarinen systeemi on stabiili tarkalleen silloin kun sen siirtofunktion napojen reaaliosat ovat negatiivisia.

Esimerkki



$$x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y,$$

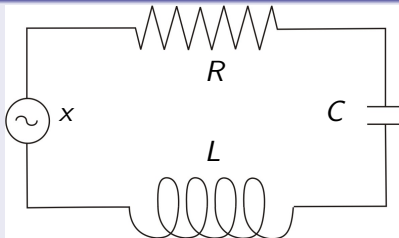
Josta $X(s) = RCsY(s) + Y(s) = (RCs + 1)Y(s)$ ja

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{RCs + 1}}_{G(s)} X(s).$$

Esimerkki

Siirtofunktion ainoa napa on $s = -\frac{1}{RC} < 0$, joten systeemi on stabiili.

Esimerkki



Jos kondensaattorin päiden välistä jännitettä merkitään symbolilla y , on $y = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$ ja yhtälö $x = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$x = RCy' + y + LCy'',$$

Esimerkki

Tästä

$$X = RCsY + Y + LCs^2Y,$$

mistä nähdään että siirtofunktio on $G(S) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$.

Siirtofunktion navat ovat

$$\frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Reaalisten parametriarvojen vuoksi $(RC)^2 - 4LC < (RC)^2$, joten tässäkin tapauksessa siirtofunktion nimittäjän nollakohtien reaaliosat ovat negatiiviset.