

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

"Määritelmä"

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0 \\ \infty, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

Määritelmä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}[\delta(t - x_0)](s)$$

Näytepisteet

Jos $x(t)$ on jatkuva signaali, ja T näytteenottoväli, määritellään diskretisoitu signaali

$$x_D(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Tälle Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_D(t)](s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \mathcal{L}[\delta(t - nT)](s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}, \end{aligned}$$

missä on merkitty $z = e^{sT}$.

Diskreetit lineaariset järjestelmät

Määritelmä

Jonon $x_0, x_1, x_2, \dots$ Z -muunnos on

$$\mathcal{Z}[x_n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Funktion $x(s)$ Z -muunnos on jonon $x_n = x(nT)$ ($n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) Z -muunnos kun T on kiinnitetty.

Esimerkki

jonolle a^n on

$$\mathcal{Z}[a^n](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a},$$

kun $|a| < |z|$.

Ominaisuuksia

Lineaarisuus:

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[f_n](z) + \beta \mathcal{Z}[g_n](z)$$

Aikasiirto:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_{n+1}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= z \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_0 \right) = z \mathcal{Z}[f_n] - f_0 z,\end{aligned}$$

Ominaisuuksia

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_{n+2}](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n} \\ &= z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - f_1 z^{-1} - f_0 \right) = z^2 \mathcal{Z}[f_n] - f_1 z - f_0 z^2,\end{aligned}$$

jne.

Differenssiyhtälöt

Määritellään $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, jolloin

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

ja

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= y_{n+3} - 2y_{n+2} + y_{n+1} - (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) \\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n\end{aligned}$$

Diskreetit lineaariset järjestelmät

Differenssiyhtälöt

Yhtälö

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_0y_n = x_{n+l} + b_{l-1}x_{n+l-1} + \dots + b_0x_0$$

Määrittää diskreetin lineaarisen järjestelmän.

Differenssiyhtälöt

Olettaen jonojen alkutermi nolliksi, $\mathcal{Z}$ -muunnoksilla saadaan $Y(z) = G(z)X(z)$. Stabiilisuusehtona on että funktion $G(z)$ navat toteuttavat $|z| < 1$.

Esimerkki

$$x_0 = 1, x_{n+1} = \alpha x_n.$$

Esimerkki: Fibonaccin luvut

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = F_1 = 1,$$

josta Z -muunnokset laskemalla (ja merkitsemällä $\mathcal{Z}[F_n](z) = \hat{F}_n(z)$) saadaan

$$z^2 \hat{F}_n(z) - z - z^2 = z \hat{F}_n(z) - z + \hat{F}_n(z),$$

josta

$$(z^2 - z - 1) \hat{F}_n(z) = z^2$$

ja

$$\hat{F}_n(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}}$$

Esimerkki

Osamurtohajotelmilla (merk. $u = \frac{1}{z}$) saadaan

$$\begin{aligned}\hat{F}_n(z) &= \frac{1}{1 - u - u^2} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{u - \alpha} - \frac{1}{u - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{\frac{1}{z} - \alpha} - \frac{1}{\frac{1}{z} - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{z}{1 - \alpha z} - \frac{z}{1 - \beta z} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\alpha^{-1} \frac{z}{\alpha^{-1} - z} - \beta^{-1} \frac{z}{\beta^{-1} - z} \right)\end{aligned}$$

, missä $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ja $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Käänteinen Z -muunnos

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{\beta - \alpha}(\alpha^{-1}\alpha^{-n} + \beta^{-1}\beta^{-n}) \\&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Eulerin menetelmä

$$y' = f(t, y).$$

Funktion arvoja $y_0, y_1, y_2, \dots$ lasketaan aikoina $t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \dots t_{i+1} = t_i + h$ siten että funktio y korvataan lineaarisella approksimaatiolla:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) = y_i + h \cdot f(t_i, y_i).$$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y_0 = y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella $y_1 = 1 + h$.

Runge-Kutta -menetelmä(t)

- $k_1 = f(t_i, y_i)h$
- $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1)$
- $k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2)$
- $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Esimerkki

Differentiaaliyhtälölle $y' = y$ reunaehdolla $y(0) = 1$ saadaan yhdellä kierroksella

$$y_1 = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 \approx e^h$$

Huomautus

Mainitut numeeriset menetelmät toimivat myös DY-ryhmille

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

Toisinaan voidaan uusia funktiolta lisäämällä pienentää differentiaaliyhtälöiden kertalukua.

Esimerkki

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$x'' + 2x' + 3x = 5t$$

voidaan sijoituksella $x' = y$ muuntaa DY-pariksi. Tällöin siis $x'' = y'$, joten $y' + 2y + 3x = 5t$ ja $x' = y$, josta yhtäpitävä DY-pari on

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -3x - 2y - 5t \end{cases}$$