

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 1, 14.2.2023

1. Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ ja $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $R : A \rightarrow B$ ja $S : B \rightarrow C$ seuraavasti määritellyjä relaatioita

$$R = \{(1, b), (2, b), (3, a), (3, d)\}, \quad S = \{(a, \gamma), (b, \delta), (c, \alpha), (d, \gamma)\}.$$

Piirrä relaation R AB -esitys ja nuolikaaviot tehtävän molemmista relaatioista ja selvitä mitkä ovat relaatioiden R ja S määrittely- ja arvojoukot.

2. Muodosta edellisen tehtävän perusteella relaatiot $S \circ R$, R^{-1} , S^{-1} ja $(S \circ R)^{-1}$. Onko jokin tehtävässä esiintyvä relaatio funktio?
3. Määritellään joukossa $\{a, b, c, d\}$ binäärinen relaatio

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}.$$

Onko R ekvivalenssirelaatio? Entä osittainen järjestys?

4. Olkoon $R = \{(x, 2x - 5) \mid x \in \mathbb{R}\}$ joukon R binäärinen relaatio. Etsi jokin esitysmuoto relaatiolle R^{-1} ja hahmottele kuvaajat sekä R :lle että R^{-1} :lle.
5. Määritellään relaatio $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow |x - y| < 1.$$

Onko T refleksiivinen? Entä symmetrinen? Entä antisymmetrinen? Entä transitiivinen?

6. Olkoon $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Määritellään joukossa A binäärinen relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc,$$

Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

7. Merkitään tehtävän 6 ekvivalenssiluokkia tavalliseen tapaan symbolilla $[(a, b)]$ ja määritellään ekvivalenssiluokkien kertolasku seuraavasti:

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)].$$

Osoita suoraan laskemalla, että tämä määritelmä on riippumaton valituista edustajista, toisin sanoen, jos $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ ja $(c, d) \sim (c_1, d_1)$, niin tällöin $(ac, bd) \sim (a_1c_1, b_1d_1)$.

8. Mikä on tehtävien 6–7 kertolaskun neutraalialkio $[(n, m)]$, joka ei muuta luokkaa kertolaskussa? Siis pitäisi olla $[(a, b)] \cdot [(n, m)] = [(a, b)]$ kaikille $(a, b) \in A$. Selvitä myös mikä on luokan $[(a, b)]$ käänteisalkio, siis sellainen luokka $[(c, d)]$, että tulo $[(a, b)] \cdot [(c, d)]$ on kertolaskun neutraalialkio? Perustele. Vihje: Luen-toesimerkki koskee hyvin samankaltaista tilannetta.
9. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Onko f bijektio? Jos ei, etsi sellaiset mahdollisimman laajat joukot $A, B \subseteq \mathbb{R}$, että $f : A \rightarrow B$ on bijektio.