

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 2, 28.2.2023

1. Osoita, että reaalilukuväli $(0, 1)$ on yhtä mahtava joukon $\mathbb{R}$ kanssa. Toisin sanoen, etsi jokin bijektio $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tai $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$. Vihje: voit soveltaa esim. funktiota $\arctan$, jotain rationaalifunktiota tai eksponenttifunktion ja rationaalifunktion yhdistelmää.
2. Osoita, että $|2^A| = 2^{|A|}$, kun joukko A on äärellinen. Ohje: Tee joukon A alkioista rivi $a_1, \dots, a_n$. Mikä tahansa joukon A osajoukko voidaan valita ”poimimalla” näistä jotkut mukaan ja jättämällä muut pois. Kuinka monta tapaa on ”poimia” jokin osajoukko?
3. Liitetään reaalilukujen joukkoon alkio $-\infty$ ja sovitaan, että $-\infty < x$ ja että $-\infty + x = -\infty$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Määritellään uudeksi yhteenlaskuksi $x \oplus y = \max\{x, y\}$ ja uudeksi kertolaskuksi $x \otimes y = x + y$. Tuleeko joukosta $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ uusien laskutoimitusten suhteen puolirengas (rengas jossa ei välttämättä ole additiivista vasta-alkioita)?
4. Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Osoita että jokainen ryhmän H sivuluokka aH on yhtä mahtava kuin H . Ohje: Osoita, että funktio $f : H \rightarrow aH$, $f(h) = ah$ on bijektio.
5. Osoita, että äärellisessä ryhmässä G aliryhmän kertaluku $|H|$ jakaa aina koko ryhmän kertaluvun $|G|$. Ohje: Aliryhmän H sivuluokat peittävät koko ryhmän G eikä niillä ole yhteisiä alkioita (miksi?).
6. Olkoon R jokin rengas ja I sen ihanne. Osoita, että ehdolla $x - y \in I$ määritelty relaatio $x \equiv y$ on kongruenssi renkaassa R . Ohje: Ensin pitää osoittaa, että $x \equiv y$ on ekvivalenssirelaatio, ja sitten että tämä on yhteensopiva renkaan yhteen- ja kertolaskun suhteen.
7. Laadi viiden alkion kunnan $\mathbb{F}_5$ kertotaulu. Ohje: $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
8. Olkoon $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ kahden alkion kunta. Osoita että polynomi $x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ on jaoton. Ohje: Jos polynomi olisi jaollinen, sillä olisi nollakohta kunnassa $\mathbb{F}_2$ (miksi?). Esitä jokin toinen kolmannen asteen polynomi, joka on myös jaoton.
9. Laadi kertotaulu kahdeksan alkion kunnalle käyttämällä edellisen tehtävän jaotonta polynomia. Ohje: Luento-esimerkki neljän alkion kunnasta.