

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 3, 7.3.2023

1. Mitkä seuraavista propositiologikan kaavoista ovat hyvinmuodostettuja, kun sallitaan luennolla esitetyt lyhennysmerkinnät?

a) $\neg(x_1 \vee x_2) \wedge ((x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4))$

b) $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$

c) $(x_1 \vee x_2 \wedge x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$

d) $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee (x_1 \wedge \neg x_4))$

Määritä kaavojen totuusarvo arvotuksessa α , josta tiedetään, että $\alpha(x_1) = 1$, $\alpha(x_2) = 0$, $\alpha(x_3) = 1$ ja $\alpha(x_4) = 0$. Määritä tehtävän 1) kaavojen totuusarvot arvotuksessa α .

2. Onko olemassa sellaista totuusarvotusta, että tehtävän 1 a) kaavasta tulisi tosi?
3. Olkoon $q \neq 1$. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

aina kun $n \in \mathbb{N}$.

4. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

aina kun $n \in \mathbb{N}$.

5. Todista matemaattisella induktiolla, että jokaisessa hyvinmuodostetussa propositiologiikan kaavassa on yhtä monta vasenta (ja oikeaa suljetta).
6. Tarkastele seuraavaa todistusta ja selitä missä on virhe.

Todistetaan matemaattisella induktiolla, että jos korissa on $n \in \mathbb{N}$ biljardipalloa, niin ne ovat kaikki samanvärisiä.

Induktion lähtökohta: $n = 1$. Tällöin korissa on vain yksi pallo ja väite pitää selvästi paikkansa.

Induktioaskel: Oletetaan, että väite pitää paikkansa jollekin luvulle n (induktio-oletus) ja tarkastellaan koria, jossa on $n + 1$ biljardipalloa. Poistetaan korista yksi pallo, jolloin jäljelle jääneet n palloa ovat samanvärisiä induktio-oletuksen mukaan.

Tämän jälkeen otetaan korista jokin toinen pallo pois ja palautetaan ensin poistettu, jolloin korissa on jälleen n palloa, jotka ovat kaikki samanvärisiä induktio-oletuksen mukaan. Näin ollen siis ensiksi poistettu pallo on samanvärinen koriin jääneiden pallojen kanssa, joten kaikki $n + 1$ palloa ovat samanvärisiä.

Näin on siis näytetty toteen, että väittämän totuusarvo siirtyy luvulta n luvulle $n + 1$.

7. Selvitä kuinka monta totuusfunktioita $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ on olemassa. Vihje: Totuusfunktio $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ määräytyy yksikäsitteisesti, kun tiedetään ne vektorit $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$, joille $f(\mathbf{x}) = 1$. Kuinka monella tavalla siis voidaan valita jokin vektorijoukko $A \subseteq \mathbb{F}_2^n$?
8. Määritellään funktio $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ seuraavasti: $f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 0$ ja $f(1,1) = 1$. Esitä f propositiologiikan kaavana ja piirrä sille puukaavio
9. Määritellään funktio $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$ ehdoilla $f(0,0) = (0,0)$, $f(0,1) = (0,1)$, $f(1,0) = (0,1)$ ja $f(1,1) = (1,1)$. Etsi kuvavektorin kummallekin koordinaatille esitys propositiologiikan kaavana ja piirrä näistä puukaavio.