

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 3, 7.3.2023

1. Mitkä seuraavista propositiologikan kaavoista ovat hyvinmuodostettuja, kun sallitaan luennolla esitetyt lyhennysmerkinnät?

a) $\neg(x_1 \vee x_2) \wedge ((x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4))$

b) $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)$

c) $(x_1 \vee x_2 \wedge x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$

d) $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee (x_1 \wedge \neg x_4))$

Olkoon α arvotus, josta tiedetään, että $\alpha(x_1) = 1$, $\alpha(x_2) = 0$, $\alpha(x_3) = 1$ ja $\alpha(x_4) = 0$. Määritä hyvinmuodostettujen kaavojen totuusarvot arvotuksessa α .

Mallivastaus: a), b) ja d) ovat hyvinmuodostettuja. Tosin kohta b) vain mikäli sallitaan lyhennysmerkintä $x \wedge y \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ ja vastaava merkintä disjunktion suhteen. Sen sijaan c) ei ole hyvinmuodostettu.

Arvot ovat a) 0, b) 1 ja d) 1.

2. Onko olemassa sellaista totuusarvotusta, että tehtävän 1 a) kaavasta tulisi tosi?

Mallivastaus: Kaavalla on vain yksi toteuttava arvotus, ja tämä voidaan päätellä seuraavasti: Ensinnäkin osakaavan $\neg(x_1 \vee x_2)$ on oltava tosi, ja tämä on mahdollista vain jos $x_1 \vee x_2$ on epätosi, mikä puolestaan on mahdollista vain jos x_1 ja x_2 ovat molemmat epätosia. Myös osakaavan $x_2 \vee \neg x_3$ on oltava tosi, ja x_2 : ollessa epätosi pitää $\neg x_3$:n olla tosi, siis x_3 tulee olla epätosi. Edelleen, osakaavan $x_3 \vee x_4$ pitää olla tosi, ja x_3 :n ollessa epätosi tulee x_4 :n olla tosi. Toteuttavassa arvotuksessa α on siis $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \alpha(x_3) = 0$ ja $\alpha(x_4) = 1$.

3. Olkoon $q \neq 1$. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

aina kun $n \in \mathbb{N}$.

Mallivastaus: Induktion lähtökohta $n = 1$ saa muodon

$$\sum_{i=0}^1 q^i = \frac{1 - q^2}{1 - q} \Leftrightarrow q^0 + q^1 = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} \Leftrightarrow 1 + q = 1 + q,$$

mikä on tosi.

Induktio-oletus: Oletetaan, että yhtäsuuruus on tosi jollekin luvulle n .

Induktioväite: Yhtäsuuruus on tosi myös arvolla $n + 1$. Suoraan laskemalla ja induktio-oletusta käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} q^i &= \sum_{i=0}^n q^i + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Näin ollen väite on tosi myös arvolla $n + 1$.

4. Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

aina kun $n \in \mathbb{N}$.

Mallivastaus: Induktion lähtökohta $n = 1$ saa muodon

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1+1) \Leftrightarrow 1 = 1,$$

mikä on tosi.

Induktio-oletus: Yhtäsuuruus on tosi jollekin luvulle n . Induktioväite: Yhtäsuuruus on tosi myös luvulle $n+1$.

Suoraan laskemalla ja induktio-oletusta käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) \end{aligned}$$

5. Todista matemaattisella induktiolla, että jokaisessa hyvinmuodostetussa propositioniologian kaavassa on yhtä monta vasenta (ja oikeaa suljetta).

Mallivastaus: Induktion lähtökohta: Propositionimuuttujista $x_1, x_2, x_3, \dots$ muodostuvissa kaavoissa ei ole yhtään suljetta, joten näille väite pitää paikkansa.

Induktio-oletus: Kaavoissa ϕ ja ψ on yhtä monta vasenta ja oikeaa suljetta.

Induktioväite: Kaavoissa $(\neg\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$ ja $(\phi \vee \psi)$ on yhtä monta vasenta ja oikeaa suljetta. Todistus: Muodostettaessa uusia kaavoja vasenten ja oikeiden sulkeiden määrä lisääntyy tasan yhdellä.

6. Tarkastele seuraavaa todistusta ja selitä missä on virhe.

Todistetaan matemaattisella induktiolla, että jos korissa on $n \in \mathbb{N}$ biljardipalloa, niin ne ovat kaikki samanvärisiä.

Induktion lähtökohta: $n = 1$. Tällöin korissa on vain yksi pallo ja väite pitää selvästi paikkansa.

Induktioaskel: Oletetaan, että väite pitää paikkansa jollekin luvulle n (induktio-oletus) ja tarkastellaan koria, jossa on $n+1$ biljardipalloa. Poistetaan korista yksi pallo, jolloin jäljelle jääneet n palloa ovat samanvärisiä induktio-oletuksen mukaan.

Tämän jälkeen otetaan korista jokin toinen pallo pois ja palautetaan ensin poistettu, jolloin korissa on jälleen n palloa, jotka ovat kaikki samanvärisiä induktio-oletuksen mukaan. Näin ollen siis ensiksi poistettu pallo on samanvärisen koriin jääneiden pallojen kanssa, joten kaikki $n+1$ palloa ovat samanvärisiä.

Näin on siis näytetty toteen, että väittämän totuusarvo siirtyy luvulta n luvulle $n+1$.

Mallivastaus: Päättely samanvärisyydestä ei ole validi, jos korissa on kaksi palloa, siis induktioaskel $1 \rightarrow 2$ ei toimi.

7. Selvitä kuinka monta totuusfunktiota $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ on olemassa. Vihje: Totuusfunktio $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ määräytyy yksikäsitteisesti, kun tiedetään ne vektorit $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$, joille $f(\mathbf{x}) = 1$. Kuinka monella tavalla siis voidaan valita jokin vektorijoukko $A \subseteq \mathbb{F}_2^n$?

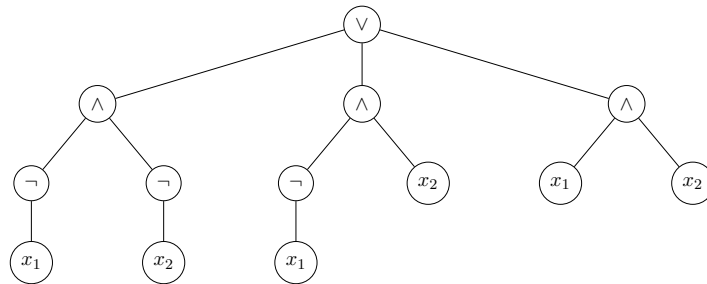
Mallivastaus: Joukolla $\mathbb{F}_2^n$ on $2^{|\mathbb{F}_2^n|} = 2^{2^n}$ osajoukkoa. Tämä on samalla se lukumäärä kuinka monella eri tavalla voidaan määritellä ne pisteet $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$, joissa $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ saa arvon 1. Totuusfunktioita $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ on siis 2^{2^n} .

8. Määritellään funktio $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ seuraavasti: $f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 0$ ja $f(1,1) = 1$. Esitä f propositiologiikan kaavana ja piirrä sille puukaavio.

Mallivastaus: Luentoesimerkin mukaan saadaan f muodossa

$$f(x_1, x_2) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

Useapaikkaiselle funktiolle $\vee$ on luontevaa käyttää useampaan osaan haarautuvaa puuesitystä:



9. Määritellään funktio $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$ ehdoilla $f(0,0) = (0,0)$, $f(0,1) = (0,1)$, $f(1,0) = (0,1)$ ja $f(1,1) = (1,1)$. Etsi kuvavektorin kummallekin koordinaatille esitys propositiologiikan kaavana ja piirrä näistä puukaavio.

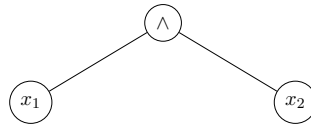
Mallivastaus: Kuvan ensimmäinen koordinaatti on 1 vain ja ainoastaan kun alkukuva on $(1,1)$, joten $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$. Toinen koordinaatti puolestaan on 1 alkukuville $(0,1)$, $(1,0)$ ja $(1,1)$, joten sen määrittämä funktio saadaan muodossa

$$f_2(x_1, x_2) = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

ja siis

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)).$$

Funktion f_1 puukaavio on hyvin yksinkertainen:



Funktion f_2 puukaavio:

