

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Demonstraatio 4, 14.3.2023

1. Oletetaan että Boolean algebrassa $a \vee b = \top$, $a \wedge b = \perp$, $a \vee c = \top$ ja $a \wedge c = \perp$. Osoita, että näistä oletuksista seuraa $b = c$.

Mallivastaus:

$$b = b \vee \perp = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c) = \top \wedge (b \vee c) = b \vee c$$

ja

$$c = c \vee \perp = c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge (c \vee b) = \top \wedge (c \vee b) = c \vee b,$$

jolloin siis $b = b \vee c = c \vee b = c$.

Huomautus: Tehtävän oletusten mukaan b ja c toteuttavat samat ehdot kuin $\neg a$ ja johtopäätös $b = c$ osoittaa, että negaatio Boolean algebrassa on yksikäsitteinen. Tästä seuraa mm. $\neg \neg x = x$.

2. Kirjoita kaava

$$(x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \vee x_3))$$

mahdollisimman yksinkertaiseen ekvivalenttiin muotoon käyttämällä Boolean algebran ominaisuuksia.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \vee x_3)) \\ \equiv & ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)) \vee (x_1 \vee x_3) \\ \equiv & (x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_2)) \vee (x_1 \vee x_3) \\ \equiv & (x_1 \wedge \top) \vee (x_1 \vee x_3) \equiv x_1 \vee (x_1 \vee x_3) \\ \equiv & (x_1 \vee x_1) \vee x_3 \equiv x_1 \vee x_3 \end{aligned}$$

Toiseksi viimeisin ekvivalenssi ei perustu suoraan Boolean algebran aksioomiin, vaan luennolla esitettyyn lauseeseen.

3. Määritellään lyhennysmerkintä $x \rightarrow y$ kaavana $\neg x \vee y$. Käytä Boolean algebran ominaisuuksia ja sievennä kaava $(x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y$ mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

Mallivastaus: Lyhennysmerkintä $\rightarrow$ ohjeen mukaan tulkiten saadaan

$$\begin{aligned} & \neg(x \wedge (\neg x \vee y)) \vee y \\ \equiv & (\neg x \vee \neg(\neg x \vee y)) \vee y \\ \equiv & (\neg x \vee (x \wedge \neg y)) \vee y \\ \equiv & ((\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee y \\ \equiv & (\top \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee y \\ \equiv & (\neg x \vee \neg y) \vee y \equiv \neg x \vee (\neg y \vee y) \\ \equiv & \neg x \vee \top \equiv \top. \end{aligned}$$

4. Kirjoita vierusmatriisi luentoruudun 8/8 esimerkille, numeroiden kaupungit etelästä pohjoiseen.

Mallivastaus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 120 & 180 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 120 & 0 & 240 & 0 \\ 120 & 120 & 0 & 120 & 170 & 0 \\ 200 & 0 & 120 & 0 & 200 & 240 \\ 0 & 230 & 170 & 200 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 0 & 240 & 230 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Kirjoita luentoruudun 8/8 esimerkistä 3×3 vierusmatriisi, jossa rajoittautaan kaupunkeihin Turku, Tampere, Vaasa. Käytä numerointia pohjoisesta etelään ja laske vierusmatriisin toinen potenssi A^2 .

Mallivastaus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 170 & 230 \\ 170 & 0 & 120 \\ 240 & 120 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$A^2 = \begin{pmatrix} 84100 & 27600 & 20400 \\ 28800 & 43300 & 39100 \\ 20400 & 40800 & 69600 \end{pmatrix}$$

6. Laske edellisen tehtävän vierusmatriisin toinen potenssi käyttämällä uusia kertoja yhteenlaskuja, jotka ovat määritelty demotehtävässä 3/28.2 (demo 2).

Mallivastaus: Uusilla laskutoimituksilla esim. Matriisin A^2 alkio kohdassa $(1, 1)$ on

$$0 \otimes 0 \oplus 170 \otimes 170 \oplus 230 \otimes 240 = \max\{0, 340, 470\} = 470.$$

samalla tavalla saadaan kaikki muutkin matriisitulon alkiot ja

$$A^2 = \begin{pmatrix} 470 & 350 & 290 \\ 360 & 340 & 400 \\ 290 & 410 & 470 \end{pmatrix}$$

Mieti onko tämän matriisin alkiolla ja 2-pituisilla reiteillä kaupunkien välillä jokin yhteys (vastaus: maksimiaika kaupungista toiseen kuljettaessa 2-pituisia reittejä pitkin)

7. Todista induktiolla, että mikäli yksinkertainen (ei useita viivoja pisteiden välillä) graafi on puu, on $|V| = |E| + 1$, missä $|V|$ on graafin pisteiden ja $|E|$ viivojen määrä.

Mallivastaus: Jos puussa on vain yksi piste (juuri) on viivojen määrä 0, ja silloin yhtälö pitää paikkansa.

Valitaan jokin puu, jossa on $|V| > 1$ pistettä ja oletetaan, että väite pitää paikkansa puille, jossa on vähemmän pisteitä.

Jos juuresta johtaa n viivaa osapuihin joissa on $|V_1|, \dots, |V_n|$ pistettä, on näissä induktio-oletuksen mukaan $|V_i| = |E_i| + 1$.

Tällöin koko puun pisteiden määrä on

$$|V| = 1 + |V_1| + \dots + |V_n|,$$

ja viivojen määrä on

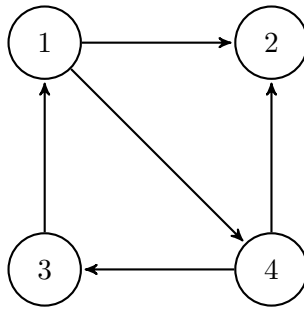
$$|E| = n + |V_1| - 1 + \dots + |V_n| - 1 = |V| - 1.$$

8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Piirrä jokin suunnattu graafi, jonka vierusmatriisi A on.

Mallivastaus:



9. Laske edellisen tehtävän graafille 2, 3, ja 4-pituisten polkujen lukumäärä pisteestä 1 pisteeseen 2. Pisteet numeroidaan edellisen tehtävän matriisin sarakkeiden mukaan.

Mallivastaus:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kysyttyjen polkujen määrä voidaan lukea näiden matriisien kohtien $(1, 2)$ alkiosta: 1, 0, 1.