

Insinöörimatematiikka: Diskreetti matematiikka

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Esimerkki

Propositiot $x \wedge \neg y$ ja $\neg(\neg x \vee y)$ eivät ole yhtäsuuret, mutta saavat samat totuusarvot kaikissa mahdollisissa totuusarvotuksissa

x	y	$x \wedge \neg y$	$\neg(\neg x \vee y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Määritelmä

Verum $\top$ on propositio, joka on tosi kaikissa tulkinnoissa. *Falsum* $\perp$ on propositio, joka on epätosi kaikissa tulkinnoissa.

Määritelmä

Propositiot ϕ ja ψ ovat *ekvivalentit*, mikäli $\alpha(\phi) = \alpha(\psi)$ kaikille totuusarvotuksille α . Tällöin merkitään $\phi \equiv \psi$. On suoraviivaista nähdä, että $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio.

Lause

Edellämainittu $\equiv$ on paitsi ekvivalenssi(relaatio), myös kongruenssi operaatioiden $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ suhteen.

Huomautus

Ylläolevan lauseen kongruenssiominaisuus merkitsee sitä, että jos $\phi_1 \equiv \phi_2$ ja $\psi_1 \equiv \psi_2$, niin $\neg\phi_1 \equiv \neg\phi_2$ ja $\phi_1 \wedge \psi_1 \equiv \phi_2 \wedge \psi_2$ ja $\phi_1 \vee \psi_1 \equiv \phi_2 \vee \psi_2$

Määritelmä

Boolean algebra on joukko B jossa on määritelty kaksi binääristä operaatiota $\wedge$ ja $\vee$, yksi unaarinen operaatio $\neg$ ja kaksi nollapaikkaista operaatiota (eli vakiota) $\perp$ ja $\top$ jotka toteuttavat seuraavat aksioomat:

- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ja $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (assosiatiivisuus).
- $a \vee b = b \vee a$ ja $a \wedge b = b \wedge a$ (kommutatiivisuus)
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ja
 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (distributiivisuus)
- $a \vee \perp = a$, $a \wedge \top = a$ (neutraalialkiot)
- $a \vee \neg a = \top$ ja $a \wedge \neg a = \perp$ (vasta-alkiot)

Lause

Boolean algebrassa pätee $\neg\neg a = a$.

Lause

Boolean algebrassa pätee $a \vee a = a$ ja $a \wedge a = a$.

Lause

Boolean algebrassa pätee $a \vee \top = \top$ ja $a \wedge \perp = \perp$.

Lause

Boolean algebrassa pätee $a \wedge (a \vee b) = a$ ja $a \vee (a \wedge b) = a$
(absorptio)

Lause

Boolean algebrassa pätee $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ ja
 $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ (De Morganin säännöt)

Lause

Propositiologiikan ekvivalenssiluokat toteutuvuusekvivalenssin suhteen muodostavat Boolean algebran, kun negaatioksi, disjunktiksi, ja konjunktiksi valitaan ekvivalenssiluokille määriteltävät operaatiot $\neg$, $\vee$ ja $\wedge$.

Esimerkki

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \\ \equiv & (x_1 \vee (\neg x_1 \wedge x_2)) \wedge (\neg x_2 \vee (\neg x_1 \wedge x_2)) \\ \equiv & ((x_1 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee x_2)) \wedge ((\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_2)) \\ \equiv & (\top \wedge (x_1 \vee x_2)) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge \top \\ \equiv & (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2) \end{aligned}$$

Esimerkki

Määritellään kaksipaikkainen konnektiivi $x \rightarrow y$ siten, että $\alpha(x \rightarrow y) = 0$ ainoastaan jos $\alpha(x) = 1$ ja $\alpha(y) = 0$.

Esimerkki

Hornin propositiot