

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 1, 25.4.2023

1. Etsi Fourier-sarja (myös reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -1, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Missä pisteissä Fourier-sarja esittää funktiota f ?

Ohje: $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, kun $n \in \mathbb{Z}$. On myös mahdollista hyödyntää esimerkkiä 37 (vuoden 2019 moniste). Osavastaus: $F_n = -\frac{2}{i\pi n}$ kun n on pariton ja $F_n = 0$, kun n on parillinen.

2. Etsi Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -x + \pi, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Ohje: Selvitä miten tehtävän funktio ja edellisen tehtävän funktio kytkeytyvät toisiinsa (kokeile derivointia)

3. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \cos x$.
4. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \cos x$
5. Selvitä minkälainen on Plancherelin kaavan ns. reaalinen muoto yhteen suuntaan äärettömänä sarjana kertoimien A_n ja B_n avulla esitettynä. Kts. vuoden 2019 moniste, sivu 43.
6. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

summa käyttämällä funktion $\sigma_1(x)$ (kts. Esimerkki 41, vuoden 2019 moniste) Fourier-sarjaa sekä Plancherelin kaavaa.

Määritellään kolme 2π -jaksoista aaltomuotoa seuraavasti:

- Kanttiaalto sq :

$$sq(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ -1 & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

- Kolmioaalto tr :

$$tr(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x - 4 & \text{kun } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

- Saha-aalto saw :

$$saw(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{\pi}x - 2 & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Seuraavissa tehtävissä ei ole välttämätöntä löytää Fourier-sarjoja, vaan selittää miten ne voitaisiin saada aiempiin perustuen.

7. Hahmottele kanttiaallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.
8. Hahmottele kolmioaallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.
9. Hahmottele saha-aallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.