

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 1, 25.4.2023

1. Etsi Fourier-sarja (myös reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -1, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Missä pisteissä Fourier-sarja esittää funktiota f ?

Ohje: $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, kun $n \in \mathbb{Z}$. On myös mahdollista hyödyntää esimerkkiä 37 (vuoden 2019 moniste). Osavastaus: $F_n = -\frac{2}{i\pi n}$ kun n on pariton ja $F_n = 0$, kun n on parillinen.

Mallivastaus: Suoraan laskettuna tapauksessa $n \neq 0$ saadaan

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx - \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{1}{-in} e^{-inx} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-in} (1 - e^{i\pi n}) - \frac{1}{-in} (e^{-i\pi n} - 1) \right) = -\frac{1 - (-1)^n}{i\pi n}. \end{aligned}$$

Kun $n = 0$, on

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} (-1) dx \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Täten kompleksinen Fourier-sarja on

$$f(x) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} e^{inx} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2n+1)} e^{i(2n+1)x}$$

Reaalista muotoa varten lasketaan $A_n = F_n + F_{-n} = 0$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n}) = -\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}$, joten reaalinen muoto on

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x$$

Toinen tapa on soveltaa esimerkkiä 37. Jos merkitään siinä esiintynyttä funktiota $g(x)$:llä, niin tässä tehtävässä $f(x) = -(2g(x) - 1)$ ja täten

$$f(x) = -2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2\pi in} e^{inx} \right) + 1 = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi in} e^{inx},$$

siis $F_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi in}$. Reaaliset kertoimet saadaan kuten edellä. Sarja esittää funktiota f kaikkialla muualla paitsi epäjatkuvuuspisteissä $x = n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

2. Etsi Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -x + \pi, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Ohje: Selvitä miten tehtävän funktio ja edellisen tehtävän funktio kytkeytyvät toisiinsa (kokeile derivointia)

Mallivastaus: Koska $g'(x) = f(x)$, on $g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$, joten sen Fourierin sarja on

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \int_{-\pi}^x \sin((2k+1)t) dt \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \left/ \frac{-1}{2k+1} \cos((2k+1)t) \right. \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} (\cos((2k+1)x) - \cos((2k+1)\pi)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) + C, \end{aligned}$$

missä

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

Vakion C määrittämiseksi huomataan, että $C = \frac{A_0}{2} = F_0$ (Fourier-sarjan vakio-termi), joten

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \right) = \frac{\pi}{2}$$

(Mieti miksi integraalin arvo on tällainen).

3. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \cos x$.

Mallivastaus: Määritetään ensin kompleksiset kertoimet.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{-2inx} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{-2inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ix(1-2n)} + e^{-ix(1+2n)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left/ \frac{\pi}{2} \right. \left(\frac{1}{i(1-2n)} e^{ix(1-2n)} - \frac{1}{i(1+2n)} e^{-ix(1+2n)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{i(1-2n)} \left(e^{i\frac{\pi}{2}(1-2n)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(1-2n)} \right) - \frac{1}{i(1+2n)} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}(1+2n)} - e^{i\frac{\pi}{2}(1+2n)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{i(1-2n)} (ie^{-i\pi n} + ie^{i\pi n}) - \frac{1}{i(1+2n)} ((-i)e^{-i\pi n} - ie^{i\pi n}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2(-1)^n}{1-2n} + \frac{2(-1)^n}{1+2n} \right) = \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}. \end{aligned}$$

Toinen vaihtoehto integraalin laskemiseksi on soveltaa kaavakokoelmaa, josta löytyy antiderivaatta muotoa $\cos ax e^{bx}$ olevalle funktiolle.

Selvästi $F_{-n} = F_n$, joten reaaliset kertoimet ovat $A_n = F_n + F_{-n} = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$ ja $B_n = 0$. Näin ollen

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

4. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \cos x$

Mallivastaus: Kyseinen funktio on $\cos x$ (koko reaaliakselilla), joten reaalinen Fourier-sarja on

$$f(x) = \cos x$$

(vain yksi termi). Kompleksinen Fourier-sarja saadaan Eulerin kaavan avulla

$$f(x) = \cos x = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}.$$

Tässäkin on vain äärellinen määrä termejä.

5. Selvitä minkälainen on Plancherelin kaavan ns. reaalinen muoto yhteen suuntaan äärettömänä sarjana kertoimien A_n ja B_n avulla esitettynä. Kts. vuoden 2019 moniste, sivu 43.

Mallivastaus:

$$|A_n|^2 = (F_n + F_{-n})(\overline{F_n} + \overline{F_{-n}}) = |F_n|^2 + F_n\overline{F_{-n}} + F_{-n}\overline{F_n} + |F_{-n}|^2$$

ja

$$|B_n|^2 = i(F_n - F_{-n})(-i)(\overline{F_n} - \overline{F_{-n}}) = |F_n|^2 - F_n\overline{F_{-n}} - F_{-n}\overline{F_n} + |F_{-n}|^2,$$

josta

$$|A_n|^2 + |B_n|^2 = 2(|F_n|^2 + |F_{-n}|^2).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \\ &= |F_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|F_n|^2 + |F_{-n}|^2) \\ &= \left| \frac{A_0}{2} \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (|A_n|^2 + |B_n|^2) \end{aligned}$$

6. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

summa käyttämällä funktion $\sigma_1(x)$ (kts. Esimerkki 41, vuoden 2019 moniste) Fourier-sarjaa sekä Plancherelin kaavaa.

Mallivastaus: Välillä $[0, 1]$ on $\sigma_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, joten

$$\int_0^1 |\sigma_1(x)|^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{12}x^3 \right) dx = \frac{1}{120}.$$

Plancherelin kaavan perusteella tämä on sama kuin funktion σ_1 Fourier-kertoimien itseisarvojen neliöiden summa. Koska

$$\sigma_1(x) = -\frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x),$$

on siis

$$\frac{1}{120} = \left| -\frac{1}{12} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right|^2,$$

josta edelleen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^4 n^4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{144} \right).$$

Tästä yhtälöstä ratkeaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Määritellään kolme 2π -jaksoista aaltomuotoa seuraavasti:

- Kanttiaalto sq :

$$sq(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ -1 & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

- Kolmioaalto tr :

$$tr(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}x - 4 & \text{kun } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

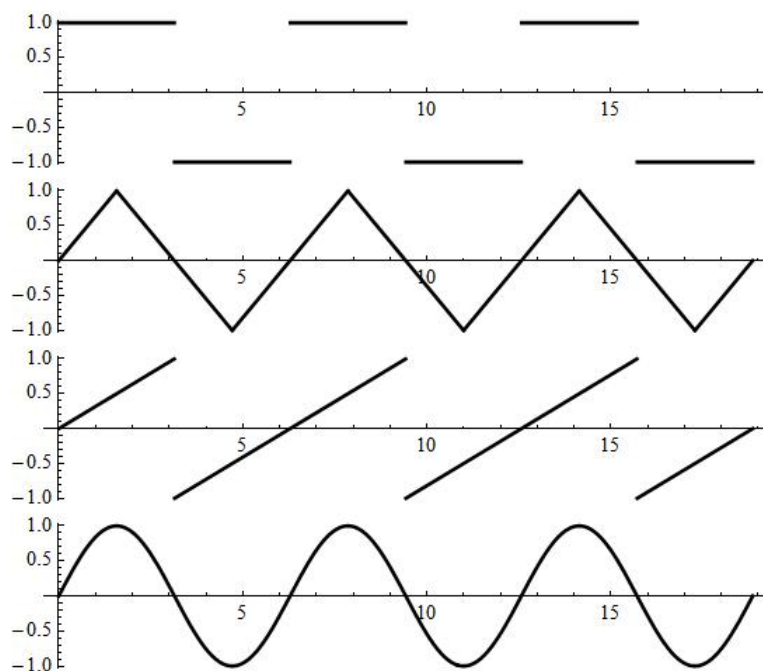
- Saha-aalto saw :

$$saw(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{\pi}x - 2 & \text{kun } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Seuraavissa tehtävissä ei ole välttämätöntä löytää Fourier-sarjoja, vaan selittää miten ne voitaisiin saada aiempiin perustuen.

7. Hahmottele kanttiaallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.
8. Hahmottele kolmioaallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.
9. Hahmottele saha-aallon kuvaajaa. Selosta miten sen Fourier-sarja voitaisiin saada luentomonisteen tai -esimerkkien tai aiempien demotehtävien Fourier-sarjoista.

Mallivastaukset: Kantti-, kolmio- ja saha-aaltojen kuvaajat ovat alla, mukana vielä alinna vertailun vuoksi siniaallon kuvaaja.



Kanttiaallon Fourier-sarja on selvitetty tehtävässä 1 sillä erotuksella, että tehtävän 1 funktio f on vastakkaismerkkinen, siis $Sq = -f$,

$$sq(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x$$

Tehtävässä 2 on selvitetty kolmioaallon g Fourier-sarja, mutta tehtävän 2 kolmioaallolla on eri amplitudi, eri vakio ja eri vaihe kuin yllä olevassa kuvassa. Kuvan kolmioaalto saadaan tehtävän 2 kolmioaallosta siirroilla ja skaalauksella:

$$tr(x) = \frac{2}{\pi}g(x - \frac{\pi}{2}) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \sin((2k+1)x).$$

Ylläoleva muoto saadaan funktion g Fourier-sarjasta kun huomataan, että $\cos((2k+1)(x - \frac{\pi}{2})) = (-1)^k \sin(2k+1)x$ (miksi?).

Luennolla esitelty σ_0 on saha-aalto, mutta erilaisella jaksolla, vaiheella, ja amplitudilla kuin yllä. $saw(x) = 2\sigma_0(\frac{x-\pi}{2\pi})$, josta

$$saw(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx).$$

Sarja perustuu siihen, että $\sin(n(x - \pi)) = (-1)^n \sin nx$ (miksi?).