

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 2, 2.5.2023

1. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x)$ ei ole olemassa (äärellisenä) millekään luvulle $x \in \mathbb{R}$.
2. Olkoon $\alpha < 0$. Selvitä mitä on $\mathcal{F}[f(\alpha x)](y)$. Ohje: Sijoita Fourier-muunnoksen määrittelevään integraaliin $x = \frac{s}{\alpha}$.
3. Laske $\mathcal{F}[e^{-|x|}](y)$ suoraan Fourier-muunnoksen määritelmään perustuen. Vastaus: $\frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2}$, mutta esitä yksityiskohdat ja perustelut.
4. Määritä

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](y).$$

Ohje: Etsi edelliseen tehtävän, lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen avulla sellainen funktio $f(x)$, jolle $\mathcal{F}[f(x)](y) = \frac{1}{1+y^2}$. Käytä lopuksi duaaliperiaatetta.

5. Selvitä duaalitettiperiaatetta käyttämällä $\mathcal{F}[\delta(x)](y)$ ja tämän avulla $\mathcal{F}[\delta'(x)](y)$. Käytä jälkimmäistä tulosta selvittääksesi $\mathcal{F}[x](y)$.
6. Määritellään Hermiten sisätulo seuraavasti:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Laske sisätulo $(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x})$ ja esitä se δ -funktion avulla. Ohje: Voit hyödyntää luennolla esiintyneitä δ -funktion esitystapoja.

7. Määritä funktion $\delta(x - f)$ amplitudi- ja vaihespektrit
8. Laske $H * H$, kun H on Heavisiden funktio
9. Olkoon H Heavisiden funktio. Varmista että kaava

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

pitää paikkansa. Laske tämän jälkeen kaavan kummankin puolen Fourier-muunnokset käyttämällä oikealla puolella lineaarisuutta ja aikasiirtoa. Merkitse funktion H Fourier-muunnosta $\hat{H}$:lla. Minkä lausekkeen saat näin $\hat{\hat{H}}$:lle?