

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 2, 2.5.2023

1. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x)$ ei ole olemassa (äärellisenä) millekään luvulle $x \in \mathbb{R}$.

Vastaus: Jos $x = 0$, on

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau = \infty.$$

Jos $x \neq 0$, on

$$\tau \operatorname{sinc}(\tau x) = \tau \frac{\sin(\tau \pi x)}{\tau \pi x} = \frac{\sin(\tau \pi x)}{\pi x}.$$

Kun $\tau \rightarrow \infty$, heilahtelee ylläolevan lausekkeen arvo lukujen $\pm \frac{1}{|\pi x|}$ välissä, eikä siis lähesty mitään raja-arvoa.

2. Olkoon $\alpha < 0$. Selvitä mitä on $\mathcal{F}[f(\alpha x)](y)$. Ohje: Sijoita Fourier-muunnoksen määrittelevään integraaliin $x = \frac{s}{\alpha}$.

Vastaus: Sijoituksessa $x = \frac{s}{\alpha}$ rajat muuttuvat päinvastaisiksi, koska $\alpha < 0$. Lisäksi $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\alpha}$, joten

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{2\pi i \frac{s}{\alpha} y} \frac{1}{\alpha} ds = -\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

3. Laske $\mathcal{F}[e^{-|x|}](y)$ suoraan Fourier-muunnoksen määritelmään perustuen. Vastaus: $\frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2}$, mutta esitä yksityiskohdat ja perustelut.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-|x|}](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-2\pi i x y} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-|x| - 2\pi i x y} dx + \int_0^{\infty} e^{-|x| - 2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{x(1 - 2\pi i y)} dx + \int_0^{\infty} e^{x(-1 - 2\pi i y)} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1 - 2\pi i y} e^{x(1 - 2\pi i y)} + \int_0^{\infty} \frac{1}{-1 - 2\pi i y} e^{x(-1 - 2\pi i y)} \\ &= \frac{1}{1 - 2\pi i y} - \frac{1}{-1 - 2\pi i y} = \frac{1}{1 + 2\pi i y} + \frac{1}{1 - 2\pi i y} \\ &= \frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2} \end{aligned}$$

4. Määritä

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + x^2}\right](y).$$

Ohje: Etsi edelliseen tehtävän, lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen avulla sellainen funktio $f(x)$, jolle $\mathcal{F}[f(x)](y) = \frac{1}{1 + y^2}$. Käytä lopuksi duaaliperiaatetta.

Vastaus: Ohjeessa mainittujen periaatteiden mukaan

$$\mathcal{F}[\alpha e^{-|\beta x|}](y) = \alpha \frac{1}{\beta} \frac{2}{1 + 4\pi^2 \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}$$

Nyt siis α ja β pitäisi valita siten, että $\frac{2\alpha}{\beta} = 1$ ja $\frac{4\pi^2}{\beta^2} = 1$, jolloin siis $\beta = 2\pi$ ja $\alpha = \pi$.

Duaaliperiaatteen mukaan

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+y^2}\right](x) = \pi e^{-2\pi|x|} = \pi e^{-2\pi|x|}.$$

5. Selvitä duaalitettiperiaatetta käyttämällä $\mathcal{F}[\delta(x)](y)$ ja tämän avulla $\mathcal{F}[\delta'(x)](y)$. Käytä jälkimmäistä tulosta selvittääksesi $\mathcal{F}[x](y)$.

Vastaus: Koska $\mathcal{F}[1](y) = \delta(y)$, on $\mathcal{F}[\delta(x)](y) = 1$. Derivointiperiaatteen mukaisesti $\mathcal{F}[\delta'(x)](y) = 2\pi i y$. Edelleen duaaliperiaatetta käyttämällä saadaan $\mathcal{F}[2\pi i x] = \delta'(-y) = -\delta'(y)$, mistä saadaan

$$\mathcal{F}[x] = -\frac{1}{2\pi i} \delta'(y).$$

Yllä käytetty yhtälö $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ seuraa siitä, että $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ja $\delta(-x) = \delta(x)$. Näin ollen

$$(-x)\delta'(-x) = -\delta(-x) = -\delta(x) = x\delta'(x).$$

6. Määritellään Hermiten sisätulo seuraavasti:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Laske sisätulo $(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x})$ ja esitä se δ -funktion avulla. Ohje: Voit hyödyntää luennolla esiintyneitä δ -funktion esitystapoja.

Vastaus:

$$(e^{2\pi i f_1 x}, e^{2\pi i f_2 x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_1 x} e^{-2\pi i f_2 x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (f_2 - f_1)x} dx = \delta(f_2 - f_1).$$

7. Määritä funktion $\delta(x - f)$ amplitudi- ja vaihespektrit

Vastaus:

$$\mathcal{F}[\delta(x - f)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - f) e^{-2\pi i x y} dx = e^{-2\pi i f y}.$$

Tällöin siis amplitudispektri on $|\mathcal{F}(y)| = 1$ ja vaihespektri on $-2\pi f y$.

Tulkinta: Signaalin $\delta(x - f)$ spektrissä esiintyvät kaikki taajuudet y itseisarvoltaan 1 amplitudilla, mutta vaihekulma on $-2\pi f y$.

8. Laske $H * H$, kun H on Heavisiden funktio

Vastaus:

$$(H * H)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) H(x - t) dt = \int_0^{\infty} H(x - t) dt.$$

Koska $x - t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq x$, on $(H * H)(x) = 0$, jos $x \leq 0$. Jos taas $x > 0$, on

$$(H * H)(x) = \int_0^x dt = x.$$

9. Olkoon H Heavisiden funktio. Varmista että kaava

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

pitää paikkansa. Laske tämän jälkeen kaavan kummankin puolen Fourier-muunnokset käyttämällä oikealla puolella lineaarisuutta ja aikasiirtoa. Merkitse funktion H Fourier-muunnosta $\hat{H}$:lla. Minkä lausekkeen saat näin $\hat{H}$:lle?

Vastaus: Fourier-muunnokset laskemalla saadaan

$$\text{sinc } y = \hat{H}(y)e^{\pi iy} - \hat{H}(y)e^{-\pi iy} = \hat{H}(y) \cdot 2i \sin \pi y,$$

josta

$$\hat{H}(y) = \text{sinc } y \frac{1}{2i \sin \pi y} = \frac{1}{2\pi iy}.$$

Huomautus: Näin saatu muoto on virheellinen. Virhe johtuu siitä, että Π -funktion esittäminen Heavisiden funktion avulla ja Fourier-muunnoksen laskeminen sitä kautta johtaa kahteen hajaantuvaan integraaliin. Oikea muoto on esitetty luennolla.